МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА, ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В. Ломоносова

Физический факультет

Кафедра теоретической физики

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ЭЛЕКТРОНОВ В ПОЛЕ ОНДУЛЯТОРА

Дипломная работа
студента 6-го курса
Квитанцева А.С.

Допущен к защите

"12" января 1999 г.

Зав. кафедрой теоретической физики
доктор физ.-мат. наук,
академик РАН

____

(Славнов А.А.)

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук,

____

(Хапаев А.М.)

Москва 1999

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Дипломная работа посвящена математическому моделированию динамики электронов в ондуляторах различного типа. Ондулятор представляет собой прибор с периодическим электромагнитным полем. Он искривляет траекторию проходящего через него электронного пучка и, тем самым, формирует излучение. Как показывает анализ, длина волны генерируемых колебаний примерно в $4\gamma^2$ меньше длины периода при взаимодействии релятивистского электронного пучка с электромагнитной волной и в $2\gamma^2$ меньше – при взаимодействии с периодическим магнитным полем ондулятора. Здесь $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ – релятивистский фактор электрона, движущегося со скоростью v. Факт релятивистского сокращения генерируемой длины волны по сравнению с периодом структуры, в которой происходит генерация, является принципиально важным и позволяет в приборах больших размеров генерировать коротковолновые колебания.

Вообще говоря, среди устройств, создающих периодическое электромагнитное поле, существует разделение на виггглеры, преобразователи длины волны и ондуляторы [2]. Как известно, синхротронное излучение релятивистских электронов сосредоточено в узком конусе с углом раствора $\delta \sim 1/\gamma$, ось конуса совпадает с направлением распространения электрона. Периодическое электромагнитное поле вызывает отклонения вектора скорости электрона от первоначального направления распространения. Для вигглеров эти отклонения велики по сравнению с углом раствора конуса естественного синхротронного излучения, давая в результате широкополосное испускание веерообразного пучка фотонов. Преобразователи длины волны – это вигглеры с малым количеством периодов, создающие большие поля на оси, предназначенные скорее не для увеличения интенсивности излучения, а для сдвигания спектра излучения в область малых длин волн. Ондуляторы вызывают малые отклонения вектора скорости электрона, сравнимые с углом раствора конуса естественного синхротронного излучения. Излучение, испущенное отдельными электронами, отстоящими друг от друга на расстояние, равное целому числу периодов ондулятора, интерферирует когерентно, давая в результате испускание остронаправленного пучка фотонов, которое заключено в узких энергетических полосах на гармониках основной частоты.

В качестве примера рассмотрим стационарное периодическое магнитное поле, изменяющееся синусоидально $B_y = B_\perp \cos \varkappa z$. Уравнение движения для ультрарелятивистского электрона ($\gamma \gg 1$), движущегося со средней скоростью $< v_z >$ перпендикулярно этому полю, имеет вид

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}\gamma) = e\left(\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{v}\,\vec{B}]\right).$$

После интегрирования получаем

$$\frac{v_z}{c} = \frac{K}{\gamma}\sin\varkappa z, \quad x = \frac{K}{\gamma\varkappa}\cos\varkappa z,$$

где $K \equiv eB_\perp/\varkappa mc$ – отклоняющий параметр. Максимальные угловое отклонение скорости и амплитуда траектории электрона есть K/γ и $K/\gamma\varkappa$ соответственно. K, следовательно, является отношением между углом веера излучения и апертурой конуса характеристического излучения, $1/\gamma$. Таким образом, $K \gg 1$ для вигглеров и $K \leq 1$ для ондуляторов. В дальнейшем изложении не будем придерживаться такой классификации, так как полученные результаты не будут от этого зависеть.

Ондуляторы используются при создании лазеров на свободных электронах (ЛСЭ), в которых рабочим телом является пучок релятивистских электронов. Схему ЛСЭ упрощенно можно представить в виде накопительного кольца, на прямолинейном участке которого установлен ондулятор. Для фокусировки электронного пучка вдоль орбиты накопительного кольца наложено постоянное магнитное поле, которое называют ведущим магнитным полем. Механизм работы таких устройств обьясняется следующим образом. Электроны, взаимодействующие с периодическим электромагнитным полем ондулятора, приобретют небольшую осциллирующую скорость в плоскости, перпендикулярной направлению распространения пучка. Это движение, в свою очередь, влияет на продольное движение, вызывая продольную группировку электронов, и позволяет преобразовать энергию электронов в рассеянное излучение. Когда продольная группировка происходит в масштабе длины волны излучения, происходит усиление излучения. Для эффективной группировки можно использовать или статическое пространственно-периодическое магнитное поле или электромагнитную волну достаточно большой напряженности. Таким образом, ондуляторное поле играет роль волны накачки. Основная техническая трудность заключается в том, чтобы после пролета через ондулятор возвратить электронный пучок на равновесную орбиту накопительного кольца. Для этого необходимо знать отклонение электронов от первоначального направления распространения в зависимости от длины пролета области взаимодействия.

ЛСЭ может работать и как генератор и как усилитель. В конструкции генератора периодическое поле находится внутри оптического резонатора.

Излучение, испущенное электронами, удерживается внутри резонатора с помощью зеркал, модулируя таким образом электронный пучок. Когерентное излучение усиливается и пропускается через полупрозрачное зеркало, становясь лазерным лучом, пригодным для использования. В конструкции усилителя электронный пучок проходит через периодическое электромагнитное поле соосно с входным лазерным лучом желаемой длины волны. Взаимодействие колеблющихся электронов с электрическим полем лазерного луча вызывает группировку электронов в сгустки, имеющие форму дисков, расположенных перпендикулярно направлению распространения. Испущенные фотоны находятся в одинаковой фазе друг с другом, с излучением, испущенным электронами в сгустках и с входным лазерным сигналом. Излучение может расти и из шума (фонового излучения) без помощи затравочного лазера, создавая спонтанное излучение, которое само себя усиливает.

Лазерная среда в ЛСЭ – электронный пучок в вакууме является неразрушаемой средой и нет никаких ограничений по плотности пропускаемого излучения. В отличие от этого, обычные лазеры используют атомные переходы и, когда плотность энергии увеличивается, нагретая среда взаимодействует с лазерным излучением, искажая фазовый фронт и ухудшая качество луча. К числу положительных качеств электронного пучка, как среды лазера, относится также то, что частота электромагнитных волн, излучаемых колеблющимися электронами, в принципе, не ограничена как со стороны низких, так и высоких частот; что электронные пучки могут иметь очень высокие мощности, и поэтому при КПД лазера на свободных электронах около 10% он будет достаточно мощным. Кроме того, в обычных лазерах усиление или генерация электромагнитного излучения возможны только на строго определенных частотах, характеризующих спектры поглощения рабочего тела. В ЛСЭ частоты, на которых можно усиливать излучение, определяются такими параметрами, как напряженность и характерный размер макроскопического поля, энергия электрона и др. При фиксированных значениях этих параметров энергия фотона, испущенного в заданном направлении, также фиксирована. Однако в ЛСЭ значения некоторых параметров (например энергию электрона и напряженность поля) можно изменять, не нарушая конструкции самого прибора. Таким образом, появляется возможность варьирования спектра частот, на которых можно осуществить генерацию или усиление электромагнитного излучения.

Исторически первым был квантовомеханический подход к описанию процессов в ЛСЭ. Электрон в ЛСЭ излучает в элементарном акте квант, энергия которого во много раз меньше энергии исходной частицы. Это позволяет каждому электрону в процессе взаимодействия с полем накачки излучить много квантов. Поэтому движение и излучение частиц могут быть описаны уравнениями классической электродинамики.

Анализ движения релятивистских зарядов в поле ондулятора обычно осуществляется с помощью численных методов, основанных на интегрировании систем нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих взаимодействие с электромагнитным полем. Использование численных методов существенно ограничивает возможности исследования и лишает полученные результаты наглядности. Точное аналитическое решение простейших задач нелинейной динамики носит, как известно, исключительный характер. А точное решение хорошо потому, что помимо установления количественных оценок позволяет в простой форме объяснить качественные стороны происходящих процессов, помогает понять суть явления.

В общем случае для нахождения траектории электронов в ондуляторе нужно решать совместно уравнения Власова и Максвелла. Для моноэнергетического, однородного по плотности электронного пучка самосогласованные уравнения, описывающие взаимодействие, имеют вид [8]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} + v_z \dfrac{\partial f}{\partial z} + e\left\{\vec{E} + \frac{1}{c}\left[\vec{v}\,(\vec{B}_1 + \vec{B}_\perp)\right]\right\}\dfrac{\partial f}{\partial \vec{p}} = 0, \\ \operatorname{rot}\vec{B}_1 = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{E}_1}{\partial t} - \dfrac{4\pi}{c} e \int \vec{v} f(\vec{r},\vec{p},t)d\vec{p}, \\ \operatorname{rot}\vec{E}_1 = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{B}_1}{\partial t}, \\ \operatorname{div}\vec{E}_\parallel = -4\pi e \int f(\vec{r},\vec{p},t)d\vec{p}, \end{cases}$$

где $f(\vec{r},\vec{p},t)$ – функция распределения электронов пучка в фазовом пространстве, $\vec{p} = m\vec{v}\gamma$ – механический импульс,

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_\parallel,$$

$$\vec{E}_1 = \frac{E_1}{2}(\vec{e}_x + i\vec{e}_y)e^{-i\omega_1 t + i\varkappa_1 z} + \text{к.с.}$$

– поле излучения,

$$\vec{E}_\parallel = \frac{E_\parallel}{2}\vec{e}_z e^{-i\omega_\parallel t + \varkappa_\parallel z} + \text{к.с.}$$

– поле пространственного заряда,

$$\vec{B}_\perp = B_\perp(\vec{e}_x \cos\varkappa z + \vec{e}_y \sin\varkappa z)$$

– поперечное магнитное поле, создаваемое ондулятором.

Эта система сильно нелинейна и очевидно, что решить ее аналитически крайне сложно. Поэтому сделаем следующие приближения. Не будем учитывать влияние поля излучения на движение электронов. Не будем также учитывать коллективные эффекты, обусловленные полем пространственного заряда, т.е. взаимодействие электронов в пучке. Таким образом, задача сводится к нахождению закона движения электрона в заданном внешнем поле ондулятора, т.е. к решению системы уравнений Максвелла-Лоренца

$$\begin{cases} m\ddot{\vec{r}} = e\vec{E}\gamma + \frac{e}{c}[\dot{\vec{v}}\,\vec{B}], \\ \dot{\mathcal{E}} = e(\dot{\vec{r}}\,\vec{E}), \end{cases}$$

где $\mathcal{E} = mc^2\gamma$ – энергия электрона. Точка означает производную по собственному времени τ, которое связано с лабораторным временем соотношением $d\tau = dt/\gamma$.

Целью настоящей работы является поиск точного решения уравнений движения Максвелла-Лоренца, анализ влияния поля ондулятора на отклонение заряда от оси.

1 ДИНАМИКА ЭЛЕКТРОНОВ В СПИРАЛЬНОМ ОНДУЛЯТОРЕ

В этой части исследуем поведение электронов в спиральном ондуляторе без ведущего магнитного поля. Для того чтобы упростить расчеты будем пользоваться приближенным выражением для магнитного поля, полученным в пункте 1.1.

1.1 МАГНИТНАЯ СИСТЕМА СПИРАЛЬНОГО ОНДУЛЯТОРА

Магнитное поле винтовой структуры может быть создано проводящей петлей, образованной двумя диаметрально противоположными спиралями из линейного или ленточного провода, причем одна из них образует прямой, а другая обратный провод петли тока. Магнитное поле, создаваемое такой системой, в цилиндрической системе координат (ρ, φ, z) имеет вид [4]

$$\begin{aligned} B_\rho(\rho,\varphi,z) &= -\frac{8I}{c}\varkappa^2 a \sum_{n=1,3,5,\cdots} I_n'(n\varkappa\rho)K_n'(n\varkappa)\frac{\sin\alpha n}{\alpha}\cos n(\varphi-\varkappa z), \\ B_\varphi(\rho,\varphi,z) &= -\frac{8I}{c\rho}\varkappa a \sum_{n=1,3,5,\cdots} I_n(n\varkappa\rho)K_n'(n\varkappa a)\frac{\sin\alpha n}{\alpha}\sin n(\varphi-\varkappa z), \\ B_z(\rho,\varphi,z) &= -\varkappa\rho B_\varphi(\rho,\varphi,z), \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

где I – ток, проходящий через петлю; c – скорость света; $\varkappa = 2\pi/\lambda$, λ – шаг спиралей; a – радиус спиралей; $l = \lambda N$, N – число витков; 2α – угол, под которым видно сечение каждой из лент плоскостью $z = \text{const}$; I_n, K_n, I'_n, K'_n – функции Инфельда и Макдональда (функции Бесселя и Неймана чисто мнимого аргумента) и их производные. Ось z направлена вдоль оси магнитной системы, а координата φ отсчитывается от угла, определяющего среднюю линию первой ленты в плоскости $z = 0$.

В приложении А.1 приведены равномерные асимптотические разложения функций I_n, K_n, I'_n, K'_n при больших значениях порядка и показано, что основной вклад в сумму рядов (1.1.1) вносят слагаемые с $n = 1$. Поэтому будем пренебрегать слагаемыми, которые соответствуют более высоким порядкам. Тогда выражения (1.1.1) принимают вид

$$\begin{aligned} &B_\rho = 2B_\perp \left[I_0(\varkappa\rho) - \frac{1}{\varkappa\rho} I_1(\varkappa\rho) \sin(\varphi - \varkappa z) \right], \\ &B_\varphi = \frac{2B_\perp}{\varkappa\rho} I_1(\varkappa\rho) \cos(\varphi - \varkappa z), \\ &B_z = -2B_\perp I_1(\varkappa\rho), \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

где

$$B_\perp = -\frac{4I}{c} \varkappa^2 a K'_1(\varkappa a) \frac{\sin\alpha}{\alpha}. \tag{1.1.3}$$

Здесь использовано соотношение соотношение (см. например [5])

$$I'_\nu(z) = I_{\nu-1}(z) - \frac{\nu}{z} I_\nu(z).$$

Принимая во внимание разложение функций I_ν в степенной ряд (см. например [5])

$$I_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\dfrac{z}{2}\right)^{2n+\nu}}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)},$$

вблизи оси $\varkappa\rho \ll 1$ получаем

$$\begin{aligned} &B_\rho = B_\perp \sin(\varphi - \varkappa z), \\ &B_\varphi = B_\perp \cos(\varphi - \varkappa z), \\ &B_z = 0. \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

Перейдем к декартовым координатам. Так как

$$\begin{aligned} &\vec{e}_x = \vec{e}_\rho \sin\varphi + \vec{e}_\varphi \cos\varphi, \\ &\vec{e}_y = -\vec{e}_\rho \cos\varphi + \vec{e}_\varphi \sin\varphi, \\ &\vec{e}_z = \vec{e}_z, \end{aligned}$$

то

$$\vec{B} = \vec{e}_\rho B_\perp \sin(\varphi - \varkappa z) + \vec{e}_\varphi B_\perp \cos(\varphi - \varkappa z) = B_\perp[\vec{e}_\rho(\sin\varphi\, \cos\varkappa z - \cos\varphi\, \sin\varkappa z) + \\ + \vec{e}_\varphi(\cos\varphi\, \cos\varkappa z + \sin\varkappa\varphi\, \sin\varkappa z)] = B_\perp(\vec{e}_x \cos\varkappa z + \vec{e}_y \sin\varkappa z).$$

Таким образом, при $\varkappa\rho \ll 1$ имеем

$$\begin{aligned} &B_x = B_\perp \cos\varkappa z,\\ &B_y = B_\perp \sin\varkappa z,\\ &B_z = 0. \end{aligned} \tag{1.1.5}$$

Этими выражениями для компонент магнитного поля (1.1.5) и будем пользоваться при расчетах.

1.2 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Как показано во введении, задача исследования динамики релятивистских электронов в поле ондулятора при некоторых приближениях может быть сведена к решению системы уравнений Максвелла-Лоренца для заряда во внешнем поле

$$\begin{cases} m\ddot{\vec{r}} = e\vec{E}\gamma + \frac{e}{c}[\dot{\vec{v}}\vec{B}],\\ \dot{\mathcal{E}} = e(\dot{\vec{r}}\vec{E}). \end{cases} \tag{1.2.1}$$

В нашем случае

$$\vec{E} = 0, \quad \vec{B}_\perp = B_\perp(\vec{e}_x \cos\varkappa z + \vec{e}_y \sin\varkappa z), \tag{1.2.2}$$

поэтому приходим к следующей системе уравнений

$$\begin{cases} \ddot{x} = \omega_\perp \dot{z}\sin\varkappa z,\\ \ddot{y} = -\omega_\perp \dot{z}\cos\varkappa z,\\ \ddot{z} = -\omega_\perp(\dot{x}\sin\varkappa z - \dot{y}\cos\varkappa z),\\ \dot{\gamma} = 0, \end{cases} \tag{1.2.3}$$

где $\omega_\perp = |e|B_\perp/mc\ B_\perp$, $|e| = -e$

Таким образом, для определения траектории элекрона, имеем систему нелинейных дифференциальных уравнений 2-го порядка.

При влете в ондулятор $(z = 0)$ электрон занимает начальное положение

$$x(0) = x_0 = 0, \quad y(0) = y_0 = 0, \quad z(0) = z_0 = 0. \tag{1.2.4}$$

Начальную скорость считаем произвольной

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_0, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}_0, \quad \dot{z}(0) = \dot{z}_0 > 0. \tag{1.2.5}$$

1.3 ЗАКОН ДВИЖЕНИЯ

В этом пункте найдем координаты электрона как функции собственного времени τ, а значит и как функции лабораторного времени t, так как из (1.2.3) следует что между τ и t существует линейная связь $\tau = t/\gamma$, $\gamma = \text{const}$ (Это было заранее известно, так как в постоянном магнитном поле энергия электрона сохраняется). Интегрируя один раз систему (1.2.3), учитывая (1.2.4) и вводя обозначения

$$u_x = \frac{\dot{x}}{c}, \quad u_y = \frac{\dot{y}}{c}, \quad u_z = \frac{\dot{z}}{c}, \quad K = \frac{\omega_\perp}{c\varkappa}, \tag{1.3.1}$$

получаем

$$\begin{cases} u_x = (u_{x0} + K) - K\cos\varkappa z, \\ u_y = u_{y0} - K\sin\varkappa z, \\ \dot{u}_z = -\varkappa K(u_x \sin\varkappa z - u_y \cos\varkappa z), \\ \gamma = \text{const}. \end{cases} \tag{1.3.2}$$

Величину K называют параметром ондулятора.

Из системы (1.3.2) видно,что при подстановке первых двух ее уравнений в третье получается дифференциальное уравнение для определения зависимости $z(\tau)$, которое после несложных преобразований принимает вид

$$\dot{u}_z = -c\varkappa u_{\perp 0} K \sin(\varkappa z + \varphi_0), \tag{1.3.3}$$

где

$$u_{\perp 0} = \sqrt{(u_{x0} + K)^2 + u_{y0}^2}, \quad \sin\varphi_0 = -\frac{u_{y0}}{u_{\perp 0}}, \quad \cos\varphi_0 = \frac{u_{x0} + K}{u_{\perp 0}} \tag{1.3.4}$$

Это уравнение после введения обозначений

$$\varphi = \varkappa z + \varphi_0, \quad \omega^2 = c^2\varkappa^2 u_{\perp 0} K \tag{1.3.5}$$

преобразуется к уравнению простого маятника

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin\varphi = 0, \tag{1.3.6}$$

решение которого известно (см. например [7]). Введем новую переменную

$$u = \frac{1}{2}\sqrt{\dot{\varphi}_0^2 + 4\omega^2 \sin^2\frac{\varphi_0}{2}}\,\tau + F(\varphi\backslash m) \tag{1.3.7}$$

и параметр

$$m = \frac{4\omega^2}{\dot{\varphi}_0^2 + 4\omega^2 \sin^2\dfrac{\varphi_0}{2}}, \tag{1.3.8}$$

тогда общее решение имеет вид

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \mathrm{sn}(u|m). \tag{1.3.9}$$

Здесь $\operatorname{sn}(u|m)$ – эллиптическая функция Якоби, $F(\varphi\backslash m)$ – эллиптический интеграл 1-го рода. Определение этих функций, а также других функций, которые потребуются в дальнейшем, приведено в приложении А.2.

Будем различать три случая в зависимости от значения параметра m.

1-й случай, $m < 1$.

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \operatorname{sn}(u|m), \quad \varphi \leqslant \varphi < \infty$$

или

$$\varphi = 2(-1)^k \arcsin\operatorname{sn}(u|m) + 2\pi k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

т.е. фаза φ монотонно возрастает с увеличением u.

2-й случай, $m = 1$.

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \operatorname{th} u, \quad \varphi_0 \leqslant \varphi < \frac{\pi}{2}$$

или

$$\varphi = 2\arcsin\operatorname{th} u,$$

т.е. фаза φ асимптотически стремится к $\pi/2$ с увеличением u. Здесь использовано, что [5]

$$\operatorname{sn}(u|1) = \operatorname{th} u$$

– гиперболический тангенс.

3-й случай, $m > 1$ $(0 < 1/m < 1)$.

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{\sqrt{m}}\operatorname{sn}(\sqrt{m}\,u|\frac{1}{m}), \quad -\varphi_{max} \leqslant \varphi \leqslant \varphi_{max},\ \varphi_{max} = 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{m}},$$

или

$$\varphi = 2\arcsin\left[\frac{1}{\sqrt{m}}\operatorname{sn}(\sqrt{m}\,u|\frac{1}{m})\right],$$

т.е. фаза φ периодически изменяется с увеличением u, оставаясь в пределах от $-\varphi_{max}$ до φ_{max}. Здесь использовано соотношение [5]

$$\operatorname{sn}(u|m) = \frac{1}{\sqrt{m}}\operatorname{sn}(\sqrt{m}\,u|\frac{1}{m}) \qquad \text{при} \quad m > 0.$$

В нашем случае, из (1.3.1) и (1.3.5) имеем

$$u = \frac{1}{2}c\varkappa\sqrt{a+b}\,\tau + F(\frac{\varphi_0}{2}\backslash m), \quad m = \frac{2b}{a+b}, \tag{1.3.10}$$

где

$$a = (\gamma^2 - 1) - u_{\perp 0}^2 - K^2, \quad b = 2u_{\perp 0}K. \tag{1.3.11}$$

Выясним смысл величин a и b. Из последнего уравнения системы (1.3.2) имеем $\gamma = \mathrm{const}$. Это равенство можно переписать в виде

$$u_z^2 = (\gamma^2 - 1) - u_x^2 - u_y^2.$$

Подставляя сюда u_x и u_y из той же системы (1.3.2), после несложных преобразований получаем

$$u_z^2 = a + b\cos\varphi, \tag{1.3.12}$$

т.е. b является амплитудой колебания квадрата скорости u_z^2 около среднего значения a.

Зная $\varphi(\tau)$, из (1.3.5) получаем

$$z(\tau) = -\frac{\varphi_0}{\varkappa} + \frac{2}{\varkappa}\,\mathrm{am}(u|m). \tag{1.3.13}$$

Для определения $x(\tau)$ и $y(\tau)$ подставим (1.3.13) в первые два уравнения системы (1.3.2). Примем во внимание, что

$$\begin{aligned}\cos(2\,\mathrm{am}\,u - \varphi_0) = \cos(2\,\mathrm{am}\,u)\cos\varphi_0 + \sin(2\,\mathrm{am}\,u)\sin\varphi_0 = \\ = (1 - 2\,\mathrm{sn}^2\,u)\cos\varphi_0 + 2\,\mathrm{sn}\,u\ \mathrm{cn}\,u\ \sin\varphi_0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(2\,\mathrm{am}\,u - \varphi_0) = \sin(2\,\mathrm{am}\,u)\cos\varphi_0 - \cos(2\,\mathrm{am}\,u)\sin\varphi_0 = \\ = 2\,\mathrm{sn}\,u\ \mathrm{cn}\,u\ \cos\varphi_0 - (1 - 2\,\mathrm{sn}^2\,u)\sin\varphi_0.\end{aligned}$$

При интегрировании используем соотношения [5]

$$m\int\limits_0^u \mathrm{sn}^2\,t\,dt = -E(u) + u, \qquad \frac{d}{du}\,\mathrm{dn}\,u = -m\,\mathrm{sn}\,u\ \mathrm{cn}\,u.$$

В результате находим закон движения электрона

$$\begin{cases} x(\tau) =(u_{x0} + K)\left(1 + \dfrac{a}{2u_{\perp 0}}\right)c\tau - \dfrac{\sqrt{a+b}}{\varkappa u_{\perp 0}^2}\times \\ \qquad \times\left\{(u_{x0} + K)[E(u|m) - E(u_o|m)] + u_{y0}[\mathrm{dn}(u|m) - \mathrm{dn}(u_0|m)]\right\}, \\ y(\tau) =u_{y_0}\left(1 + \dfrac{a}{2u_{\perp 0}^2}\right)c\tau + \dfrac{\sqrt{a+b}}{\varkappa u_{\perp 0}^2}\times \\ \qquad \times\left\{-u_{y_0}[E(u|m) - E(u_0|m)] + (u_{x_0} + K)[\mathrm{dn}(u|m) - \mathrm{dn}(u_0|m)]\right\}, \\ z(\tau) = -\dfrac{\varphi_0}{\varkappa} + \dfrac{2}{\varkappa}\,\mathrm{am}(u|m), \end{cases} \tag{1.3.14}$$

где

$$u_0 = u|_{\tau=0} = F(\frac{\varphi_0}{2}\backslash m). \tag{1.3.15}$$

Если продольная скорость электрона β_{z0} значительно больше поперечных скоростей β_{x0} и β_{y0}, т.е.

$$\beta_{x0} \ll \beta_{z0}, \quad \beta_{y0} \ll \beta_{z0} \tag{1.3.16}$$

или

$$u_{x0} \ll u_{z0}, \quad u_{y0} \ll u_{z0}, \tag{1.3.17}$$

то из (1.3.10) получаем приближенное выражение для параметра m

$$m \simeq \frac{4K^2}{u_{z0}^2}. \tag{1.3.18}$$

Отсюда находим граничную скорость, при которой одно решение переходит в другое, положив $m = 1$

$$(u_{z0})_m = 2K \tag{1.3.19}$$

или, учитывая что $u_{z0} = \gamma\beta_{z0} = \beta_{z0}(1 - \beta_{z0}^2)^{-1/2}$, находим

$$(\beta_{z0})_m = \frac{2K}{\sqrt{1 + 4K^2}}. \tag{1.3.20}$$

Если $\beta_{z0} < (\beta_{z0})_m$, то $m > 1$; если $\beta_{z0} = (\beta_{z0})_m$, то $m = 1$; если $\beta_{z0} > (\beta_{z0})_m$, то $m < 1$.

Рассмотрим случай специальных начальных условий [8]

$$u_{x0} = -K, \quad u_{y0} = 0. \tag{1.3.21}$$

При них система (1.3.2) принимает вид

$$\begin{cases} u_x = -K\cos\varkappa z, \\ u_y = -K\sin\varkappa z, \\ u_z = 0. \end{cases} \tag{1.3.22}$$

Ее решение легко находится

$$\begin{cases} x(\tau) = -R\sin\Omega\tau, \\ y(\tau) = -R(1 - \cos\Omega\tau), \\ z(\tau) = \frac{\Omega\tau}{\varkappa}, \end{cases} \tag{1.3.23}$$

где

$$R \equiv \frac{K}{\varkappa u_{z0}} = \frac{\beta_{\perp 0}}{\varkappa\beta_{||0}}, \quad \Omega = c\varkappa u_{z0}. \tag{1.3.24}$$

Таким образом, в этом случае электрон движется по винтовой линии с радиусом R и частотой вращательного движения Ω. Этот же результат можно получить и из найденого закона движения (1.3.14) при произвольной начальной скорости, подставив в него (1.3.21).

В случае ультрарелятивистских электронов

$$u_{x0} \ll u_{z0}, \quad u_{y0} \ll u_{z0}, \quad \gamma \gg 1, \tag{1.3.25}$$

следовательно

$$m = \frac{4K^2}{u_{z0}^2} = \frac{4K^2}{\gamma^2} \ll 1.$$

Подставляя (1.3.25) в (1.3.14) получаем такую же траекторию, как и (1.3.23), т.е. винтовую линию. В этом случае тоже можно было сразу получить ответ, подставив в систему (1.3.2) $z = ct$.

Положим теперь начальные поперечные скорости равными нулю

$$u_{x0} = u_{y0} = 0. \tag{1.3.26}$$

Тогда закон движения (1.3.24) принимает вид

$$\begin{cases} x(\tau) = \frac{u_{z0}}{\varkappa K}\left[u - E(u|m)\right], \\ y(\tau) = \frac{u_{z0}}{\varkappa K}\left[\mathrm{dn}(u|m) - 1\right], \\ z(\tau) = \frac{2}{\varkappa}\,\mathrm{am}(u|m), \end{cases} \tag{1.3.27}$$

где

$$m = \frac{4K^2}{u_{z0}^2}.$$

Из этих формул видно, что при $m < 1$ электрон с течением времени смещается вдоль оси x и колеблется с постоянной амплитудой вдоль оси y.

При $m = 1$

$$\begin{cases} x(\tau) = \frac{u_{z0}}{\varkappa K}\left(u - \mathrm{th}\, u\right), \\ y(\tau) = \frac{u_{z0}}{\varkappa K}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}\, u} - 1\right), \\ z(\tau) = \frac{2}{\varkappa}\,\mathrm{arcsin}\,\mathrm{th}\, u. \end{cases} \tag{1.3.28}$$

1.4 ОТКЛОНЕНИЕ ЭЛЕКТРОНА ОТ ОСИ ОНДУЛЯТОРА

Пусть $\rho^2 = x^2 + y^2$ – отклонение электрона от оси ондулятора, обусловленное магнитным полем. Требуется найти $\rho = \rho(z)$. Для этого нужно знать $x(z)$ и $y(z)$. Из (1.3.13) имеем

$$u = F(\frac{\varphi}{2}\backslash m), \quad \varphi = \varkappa z + \varphi_0, \tag{1.4.1}$$

или, учитывая (1.3.10),

$$c\tau = \frac{2}{\varkappa\sqrt{a+b}}\left[F(\frac{\varphi}{2}\backslash m) - F(\frac{\varphi_0}{2}\backslash m)\right]. \qquad (1.4.2)$$

После подстановки (1.4.1), (1.4.2) в закон движения электрона (1.3.14) получаем

$$x(z) = (u_{x0}+K)\Big(1+\frac{a}{2u_{\perp 0}^2}\Big)\frac{2\left[F(\frac{\varphi}{2}\backslash m) - F(\frac{\varphi_0}{2}\backslash m)\right]}{\varkappa\sqrt{a+b}} - \frac{\sqrt{a+b}}{\varkappa u_{\perp 0}^2}\times$$
$$\times\left\{(u_{x0}+K)\left[E(\frac{\varphi}{2}\backslash m) - E(\frac{\varphi_0}{2}\backslash m)\right] + u_{y0}\left(\sqrt{1-m\sin^2\frac{\varphi}{2}} - \sqrt{1-m\sin^2\frac{\varphi_0}{2}}\right)\right\},$$

$$y(z) = u_{y0}\Big(1+\frac{a}{2u_{\perp 0}^2}\Big)\frac{2\left[F(\frac{\varphi}{2}\backslash m) - F(\frac{\varphi_0}{2}\backslash m)\right]}{\varkappa\sqrt{a+b}} - \frac{\sqrt{a+b}}{\varkappa u_{\perp 0}^2}\times$$
$$\times\left\{-u_{y0}\left[E(\frac{\varphi}{2}\backslash m) - E(\frac{\varphi_0}{2}\backslash m)\right] + (u_{x0}+K)\left(\sqrt{1-m\sin^2\frac{\varphi}{2}} - \sqrt{1-m\sin^2\varphi_0 2}\right)\right\}.$$

Преобразуем эти выражения к виду

$$\begin{cases} x(z) = \dfrac{1}{\varkappa u_{\perp 0}^2}\left[(u_{x0}+K)I(\frac{\varphi}{2}\backslash m) - u_{y0}(u_z - u_{z0})\right], \\ y(z) = \dfrac{1}{\varkappa u_{\perp 0}^2}\left[u_{y0}I(\frac{\varphi}{2}\backslash m) - (u_{x0}+K)(u_z - u_{z0})\right], \end{cases} \qquad (1.4.3)$$

где

$$I(\varphi\backslash m) = \frac{2u_{\perp 0}^2 + a}{\sqrt{a+b}}\left[F(\frac{\varphi}{2}\backslash m) - F(\frac{\varphi_0}{2}\backslash m)\right] - \sqrt{a+b}\left[E(\frac{\varphi}{2}\backslash m) - E(\frac{\varphi_0}{2}\backslash m)\right]. \qquad (1.4.4)$$

Можно показать [10], что

$$I(\varphi\backslash m) = u_{\perp 0}^2 I_1(\varphi\backslash m) - u_{\perp 0}K I_2(\varphi\backslash m), \qquad (1.4.5)$$

где

$$I_1(\varphi\backslash m) = \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\theta}{\sqrt{a+b\cos\theta}}, \quad I_2(\varphi\backslash m) = \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{a+b\cos\theta}}, \qquad (1.4.6)$$

a и b определяются из (1.3.11).

Таким образом, из (1.4.3) находим

$$\rho^2(z) = \frac{1}{\varkappa^2 u_{\perp 0}^2}\left[I^2(\varphi\backslash m) + (u_z - u_{z0})^2\right]. \qquad (1.4.7)$$

Рассмотрим различные варианты начальных условий

1. $u_{x0} = -K$, $u_{y0} = 0$. Из (1.4.3)

$$\begin{cases} x(z) = -R\sin\varkappa z, \\ y(z) = -R(1-\cos\varkappa z), \end{cases} \tag{1.4.8}$$

где

$$R = \frac{K}{\varkappa u_{z0}} = \frac{\beta_\perp}{\varkappa\beta_{||0}}, \tag{1.4.9}$$

т.е. то же, что и (1.3.24). Отсюда

$$\rho^2(z) = 2R^2\sin^2\varkappa z. \tag{1.4.10}$$

2. $u_{x0} \ll u_{z0}$, $u_{y0} \ll u_{z0}$. Получаем те же соотношения (1.4.8).

3. $u_{x0} = u_{y0} = 0$.

$$\begin{cases} x(z) = \dfrac{1}{\varkappa K} I(\varphi\backslash m), \\ y(z) = \dfrac{1}{\varkappa K}(u_z - u_{z0}), \end{cases} \tag{1.4.11}$$

$$\rho^2(z) = \frac{1}{\varkappa^2 K^2}\left[I^2(\varphi\backslash m) + (u_z - u_{z0})^2\right]. \tag{1.4.12}$$

При

$$\varepsilon = \frac{K}{u_{z0}} \ll 1$$

имеем

$$\begin{cases} x(z) = \frac{\varepsilon}{\varkappa}(\varkappa z - \sin\varkappa z), \\ y(z) = 0, \end{cases} \tag{1.4.13}$$

$$\rho(z) = x(z) = \frac{\varepsilon}{\varkappa}(\varkappa z - \sin\varkappa z). \tag{1.4.14}$$

Т.е. пролет электрона сквозь магнитную систему ондулятора сопровождается смещением его от оси системы, пропорциональным ε в первой степени.

2 СПИРАЛЬНЫЙ ОНДУЛЯТОР С ВЕДУЩИМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

В этой части исследуем динамику электрона в спиральном ондуляторе с ведущим магнитным полем, создаваемым накопительным кольцом.

2.1 ИСХОДНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ

При расчетах будем использовать приближенное выражение для магнитного поля, создаваемого ондулятором, такое же, как в части 1 (см. (1.1.5))

$$\vec{B}_\perp = B_\perp(\vec{e}_x\cos\varkappa z + \vec{e}_y\sin\varkappa z). \tag{2.1.1}$$

Как было упомянуто во введении, ондулятор устанавливается на прямолинейном участке накопительного кольца, поэтому ведущее магнитное поле в ондуляторе можно считать однородным и направленным вдоль его оси

$$\vec{B}_{||} = B_{||}\vec{e}_z. \tag{2.1.2}$$

Таким образом,

$$\vec{E} = 0, \quad \vec{B} = B_{\perp}(\vec{e}_x \cos \varkappa z + \vec{e}_y \sin \varkappa z) + B_{||}\vec{e}_z \tag{2.1.3}$$

и уравнения (1.2.3) принимают вид

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\omega_{||}\dot{y} + \omega_{\perp}\dot{z}\sin \varkappa z, \\ \ddot{y} = \omega_{||}\dot{x} - \omega_{\perp}\dot{z}\cos \varkappa z, \\ \ddot{z} = -\omega(\dot{x}\sin \varkappa z - \dot{y}\cos \varkappa z), \\ \dot{\gamma} = 0, \end{cases} \tag{2.1.4}$$

где $\omega_{\perp} = |e|B_{\perp}/mc$, $\omega_{||}|e|B_{||}/mc$, $e = -|e|$; т.е. опять имеем систему нелинейных дифференциальных уравнений 2-го порядка.

Начальные условия будем считать такими же, как (1.2.4), (1.2.5)

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0;\ \dot{x}_0,\ \dot{y}_0,\ \dot{z}_0 > 0 \text{ - любые.} \tag{2.1.5}$$

2.2 РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

В этом пункте найдем координаты электрона как функции времени. Интегрируя один раз уравнения (2.1.4) и учитывая начальные условия (2.1.5), получаем

$$\begin{cases} \dot{x} = (\dot{x}_0 + \frac{\omega_{\perp}}{\varkappa}) - \omega_{||}y - \frac{\omega_{\perp}}{\varkappa}\cos \varkappa z, \\ \dot{y} = \dot{y}_0 + \omega_{||}x - \frac{\omega_{\perp}}{\varkappa}\sin \varkappa z, \\ \ddot{z} = -\omega_{\perp}(\dot{x}\sin \varkappa z - \dot{y}\cos \varkappa z) \\ \gamma = \text{const}. \end{cases} \tag{2.2.1}$$

Для того чтобы избавиться от констант $(\dot{x}_0 + \omega_{\perp}/\varkappa)$ и $\dot{y}_0$, сделаем линейную замену переменных

$$\tilde{x} = x + \frac{\dot{y}_0}{\omega_{||}}, \quad \tilde{y} = y - \frac{\dot{x}_0 + \omega_{\perp}/\varkappa}{\omega_{||}}, \quad \tilde{z} = z. \tag{2.2.2}$$

В этих переменных уравнения (2.2.1) имеют вид

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = -\omega_{||}\tilde{y} - \frac{\omega_{\perp}}{\varkappa}\cos \varkappa z, \\ \dot{\tilde{y}} = \omega_{||}\tilde{x} - \frac{\omega_{\perp}}{\varkappa}\sin \varkappa z, \\ \ddot{\tilde{z}} = -\omega_{\perp}(\dot{\tilde{x}}\sin \varkappa z - \dot{\tilde{y}}\cos \varkappa z), \\ \gamma = \text{const}. \end{cases} \tag{2.2.3}$$

Учитывая симметрию задачи, перейдем к цилиндрической системе координат [9]

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad \psi = \varkappa z - \varphi, \\ \tilde{x} &= r\cos\theta, \quad \tilde{y} = r\sin\theta, \quad \chi = \varkappa z - \theta, \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

тогда уравнения (2.2.3) принимают вид

$$\begin{cases} \dot{r} = -\frac{\omega_\perp}{\varkappa}\cos\chi, \\ r\dot{\varphi} = \omega_{||}r - \frac{\omega_\perp}{\varkappa}\sin\chi, \\ \ddot{z} = \omega_{||}\omega_\perp r\cos\chi, \\ \gamma = \text{const}. \end{cases} \tag{2.2.5}$$

Подставляя из первого уравнения системы (2.2.5) $\cos\chi = -\varkappa\dot{r}/\omega_\perp$ в третье, получаем

$$\ddot{z} = -\omega_{||}\varkappa r\dot{r},$$

после интегрирования находим

$$\sigma = -\frac{1}{2}\varkappa\omega_{||}r^2, \tag{2.2.6}$$

где введена новая переменная

$$\sigma = \dot{z} - \dot{z}_0 \tag{2.2.7}$$

– изменение продольного импульса электрона при пролете через ондулятор.

Соотношение (2.2.6) выражает связь между изменением продольного импульса и отклонением электрона от оси ондулятора. Примем во внимание последнее уравнение системы (2.2.5) $\gamma = \text{const}$. С учетом соотношений (2.2.2) и (2.2.4) оно принимает вид

$$\dot{z}^2 = c^2(\gamma^2-1) - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 = c^2(\gamma^2-1) - \dot{\tilde{x}}^2 - \dot{\tilde{y}}^2 = c^2(\gamma^2-1) - \dot{r}^2 - r^2\dot{\theta}^2. \tag{2.2.8}$$

Подставляя первые два уравнения системы (2.2.5) в (2.2.8), получаем

$$\dot{z}^2 = \dot{z}_0^2 = \omega_{||}^2 r^2 + 2\frac{\omega_{||}\omega_\perp}{\varkappa}\sin\chi$$

или

$$\left[(\sigma+\dot{z})^2 - \dot{z}_0^2 + \omega_{||}r^2\right]^2 = 4\frac{\omega_{||}^2\omega_\perp^2}{\varkappa^2}r^2\sin^2\chi. \tag{2.2.9}$$

Из первого уравнения (2.2.5) и из (2.2.6) находим

$$\sin^2\chi = 1 + \frac{1}{2}\frac{\varkappa^2}{\omega_{||}^2\omega_\perp^2}\frac{\dot{\sigma}^2}{\sigma}. \tag{2.2.10}$$

После подстановки (2.2.10) в (2.2.9) и несложных преобразований имеем

$$\dot{\sigma}^2 = \frac{1}{4}\varkappa^2 P_4(\sigma), \tag{2.2.11}$$

где

$$\begin{gathered} P_4(\sigma) = \sigma P_3(\sigma),\ P_3(\sigma) = -(\sigma^3 + a_1\sigma^2 + a_2\sigma + a_3); \\ a_1 = 4(\dot{z}_0 - \frac{\omega_{||}}{\varkappa}),\ a_2 = 4(\dot{z}_0 - \frac{\omega_{||}}{\varkappa})^2,\ a_3 = 8\frac{\omega_{||}\omega_{\perp}^2}{\varkappa^3}. \end{gathered} \tag{2.2.12}$$

Таким образом, получили уравнение для определения зависимости σ от τ, а следовательно и для определения зависимости z от τ. Если найдем $z(\tau)$, то из соотношений (2.2.2), (2.2.4), (2.2.5), (2.2.6) и (2.2.7) можно будет найти

$$\begin{gathered} x(\tau) = -\frac{\dot{y}_0}{\omega_{||}} + \sqrt{\frac{-2(\dot{z}-\dot{z}_0)}{\varkappa\omega_{||}}}\cos\left\{\varkappa z - \arccos\left[-\frac{\varkappa}{\omega_{\perp}}\frac{\ddot{z}}{\sqrt{-2\varkappa\omega_{||}(\dot{z}-\dot{z}_0)}}\right]\right\}, \\ y(\tau) = \frac{\dot{x}_0 + \omega_{\perp}/\varkappa}{\omega_{||}} + \sqrt{\frac{-2(\dot{z}-\dot{z}_0)}{\varkappa\omega_{||}}}\sin\left\{\varkappa z - \arccos\left[-\frac{\varkappa}{\omega_{\perp}}\frac{\ddot{z}}{\sqrt{-2\varkappa\omega_{||}(\dot{z}-\dot{z}_0)}}\right]\right\}, \end{gathered} \tag{2.2.13}$$

Решим уравнение (2.2.11). Извлекая корень, имеем

$$\dot{\sigma} = \pm\frac{\varkappa}{2}\sqrt{P_4(\sigma)}. \tag{2.2.14}$$

Так как $\dot{\sigma}|_{\tau=0} < 0$, то оставляем знак "$-$". Отсюда

$$\tau = -\frac{2}{\varkappa}\int\limits_0^{\sigma}\frac{d\xi}{\sqrt{P_4(\sigma)}}, \tag{2.2.15}$$

Сделаем замену переменной $\xi = 1/x$, тогда

$$\tau = \frac{2}{\varkappa}\int\limits_{-\infty}^{1/\sigma}\frac{dx}{Q_3(x)}, \tag{2.2.16}$$

где

$$Q_3(x) = -(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + 1), \tag{2.2.17}$$

коэффициенты a_1, a_2, a_3 те же, что и в (2.2.12).

Как известно, такой интеграл может быть преобразован к эллиптическому интегралу [5]. Запишем многочлен $Q_3(x)$ в виде

$$Q_3(x) = -a_3(x-\lambda)(x-\mu)(x-\nu),\ a_3 > 0, \tag{2.2.18}$$

λ, μ и ν – корни $Q_3(x)$. В зависимости от взаимного расположения корней λ, μ и ν будем различать три случая.

1-й случай; λ, μ, ν – вещественные, $\lambda \leqslant \mu \leqslant \nu$, $\lambda \leqslant \nu$. После замены переменной

$$x = \nu - \frac{\nu - \lambda}{\sin^2 \varphi} \tag{2.2.19}$$

получаем

$$\tau = \frac{4}{\varkappa\sqrt{a_3}(\nu - \lambda)^{1/2}} F(\varphi_\sigma \backslash m), \tag{2.2.20}$$

где

$$\varphi_\sigma = \arcsin\sqrt{\frac{\nu - \lambda}{\nu - 1/\sigma}}, \quad m = \frac{\nu - \mu}{\nu - \lambda} \quad (0 \leqslant m \leqslant 1), \tag{2.2.21}$$

$F(\varphi_\sigma \backslash m)$ – эллиптический интеграл 1-го рода. (См. приложение А.2) Отсюда

$$\sigma(\tau) = \left[\nu - \frac{\nu - \lambda}{\mathrm{sn}^2(u|m)}\right]^{-1}, \tag{2.2.22}$$

где введена новая переменная

$$u = A\tau, \quad A = \frac{1}{4}\varkappa\sqrt{a_3}(\nu - \lambda)^{1/2}. \tag{2.2.23}$$

Сделав замену переменной $t = \mathrm{sn}\, u$ при интегрировании (2.2.22), находим

$$z(\tau) = \frac{1}{A\nu}[(1 + \nu\dot{z}_0)u - \Pi(n; u|m)], \tag{2.2.24}$$

где

$$n = \frac{\nu}{\nu - \lambda} \tag{2.2.25}$$

– характеристика эллиптического интеграла 3-го рода $\Pi(n; u|m)$, определение которого приведена в приложении А.2.

В предельных случаях, когда $m = 0$ и $m = 1$, эллиптический интеграл $\Pi(n; u|m)$ выражается через элементарные функции. Как видно из (2.2.25), в нашем случае $n > 1$, поэтому

при $m = 0$ $(\lambda < \mu = \nu)$

$$\Pi(n; u|0) = \frac{1}{\sqrt{n-1}} \operatorname{arcth}(\sqrt{n-1}\ \mathrm{tg}\, u), \tag{2.2.26}$$

где

$$\operatorname{arcth} u = \frac{1}{2}\ln\frac{1+u}{1-u}$$

– гиперболический арктангенс;

при $m = 1$ $(\lambda = \mu < \nu)$

$$\Pi(n; u|1) = \frac{1}{n-1}\left[\frac{\sqrt{n}}{2}\ln\frac{1+\sqrt{n}\,\operatorname{th} u}{1-\sqrt{n}\,\operatorname{th} u} - \ln(\operatorname{sh} u + \operatorname{ch} u)\right]. \qquad (2.2.27)$$

2-й случай; λ, μ, ν – вещественные, $\lambda = \mu = \nu$. Этот случай не сводится к 1-му, так как здесь параметр m не определен (см. (2.2.21)). При $\lambda = \mu = \nu$ интеграл в (2.2.16) легко берется

$$\tau = \frac{4}{\varkappa\sqrt{a_3}}\Big(\lambda - \frac{1}{\sigma}\Big)^{-1}. \qquad (2.2.28)$$

Отсюда

$$\sigma(\tau) = \frac{v^2}{\lambda v^2 - 1}, \qquad (2.2.29)$$

где введена новая переменная

$$v = B\tau, \quad B = \frac{1}{4}\varkappa\sqrt{a_3}. \qquad (2.2.30)$$

После интегрирования находим

$$z(\tau) = \begin{cases} \dfrac{1}{B\lambda}\left[(1+\lambda\dot z_0)v - \dfrac{1}{\sqrt{-\lambda}}\operatorname{arcth}\sqrt{-\lambda}\,v\right] & \text{при } \lambda < 0, \\ \dfrac{1}{B}\Big(\dot z_0 v + \dfrac{v^3}{3}\Big) & \text{при } \lambda = 0, \\ \dfrac{1}{B\lambda}\left[(1+\lambda\dot z_0)v - \dfrac{1}{2\sqrt{\lambda}}\ln\dfrac{\lambda v+1}{\lambda v-1}\right] & \text{при } \lambda > 0. \end{cases} \qquad (2.2.31)$$

3-й случай; λ – вещественный корень, $\mu = \nu^*$ – комплексно сопряженные ($\operatorname{Im}\mu \neq 0$). В этом случае многочлен $Q_3(x)$ имеет вид

$$Q_3(x) = -a_3(x-\lambda)(x^2+px+q), \quad a_3 > 0,$$

где $(x^2+px+q) > 0$ при любых вещественных x.

Для приведения интеграла в (2.2.16) к эллиптическому интегралу сделаем замену переменной

$$x = \lambda - \sqrt{\lambda^2+p\lambda+q}\,\operatorname{tg}^2\frac{\psi}{2}, \qquad (2.2.32)$$

в результате получим

$$\tau = \frac{2}{\varkappa\sqrt{a_3}(\lambda^2+p\lambda+q)^{1/4}}[2K(k) - F(\psi_\sigma\backslash k)], \qquad (2.2.33)$$

где

$$\psi_\sigma = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{\lambda - 1/\sigma}{\sqrt{\lambda^2+p\lambda+q}}\right)^{1/2}, \quad k = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\lambda + p/2}{\sqrt{\lambda^2+p\lambda+q}}\right); \qquad (2.2.34)$$

$$K(k) = F(\frac{\pi}{2}\backslash k)$$

– полный эллиптический интеграл 1-го рода. Здесь использовано соотношение [5]

$$F(s\pi \pm \varphi\backslash m) = sK(m) \pm F(\varphi\backslash m),\ s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Покажем, что $0 < k < 1$. Так как $\lambda^2 + p\lambda + q > 0$ при любом вещественном λ, то дискриминант этого квадратного трехчлена отрицателен, т.е. $p^2 - 4q < 0$, поэтому

$$\lambda^2 + p\lambda + q = \left(\lambda + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) > \left(\lambda + \frac{p}{2}\right)^2.$$

Отсюда

$$-1 < \frac{\lambda + p/2}{\sqrt{\lambda^2 + p\lambda + q}} < 1$$

или

$$0 < \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\lambda + p/2}{\sqrt{\lambda^2 + p\lambda + q}}\right) < 1.$$

Из (2.2.33) и (2.2.34) имеем

$$\sigma(\tau) = \left(\lambda - \sqrt{\lambda^2 + p\lambda + q}\,\frac{1 + \mathrm{cn}(2w|k)}{1 - \mathrm{cn}(2w|k)}\right)^{-1}, \tag{2.2.35}$$

где введена новая переменная

$$w = C\tau, \quad C = \frac{1}{4}\varkappa\sqrt{a_3}(\lambda^2 + p\lambda + q)^{1/4}. \tag{2.2.36}$$

После интегрирования находим

$$z(\tau) = \frac{1}{Cb}\Big\{(1 + b\dot{z}_0)w + \frac{1}{2}\frac{a}{b-a}\Pi(l; 2w|k) - \\ - \frac{1}{2}\frac{b}{b-a}\frac{1}{\sqrt{l-k}}\,\mathrm{arcth}\big[\sqrt{l-k}\,\mathrm{sd}(2w|k)\big]\Big\}, \tag{2.2.37}$$

где введены обозначения

$$a = \sqrt{\lambda^2 + p\lambda + q} - \lambda, \quad b = \sqrt{\lambda^2 + p\lambda + q} + \lambda; \\ l = \frac{b^2}{b^2 - a^2} \quad (l > 1) \tag{2.2.38}$$

– характеристика эллиптического интеграла 3-го рода $\Pi(l; 2w|k)$,

$$\mathrm{sd}(2w|k) = \frac{\mathrm{sn}(2w|k)}{\mathrm{dn}(2w|k)}$$

– эллиптическая функция Якоби.

При получении (2.2.37) можно было использовать формулу [5]

$$\Pi(n;\varphi\backslash 0)=\frac{1}{\sqrt{n-1}}\operatorname{arcth}\big(\sqrt{n-1}\,\operatorname{tg}\varphi\big)\quad \text{при } n>1.$$

Можно проверить, что все три решения (2.2.24), (2.2.31) и (2.2.37) переходят друг в друга.

Теперь, когда найдено $z(\tau)$ для всех трех возможных случаев взаимного расположения корней λ, μ и ν, можно определить $x(\tau)$ и $y(\tau)$ по формулам (2.2.13).

Для того, чтобы установить, какой из этих трех случаев соответствует существующим физическим системам, выпишем в явном виде выражения для корней λ, μ, ν многочлена (2.2.17), который перепишем в виде

$$Q_3(x)=a_3(x^3+b_2x^2+b_1x+b_0), \tag{2.2.39}$$

где

$$b_0=\frac{1}{a_3}=\frac{1}{8}\frac{\varkappa^3}{\omega_\perp^2\omega_{||}},\quad b_1=\frac{a_1}{a_3}=4b_0\delta,\quad b_2=\frac{a_2}{a_3}=4b_0\delta^2;\quad \delta=\dot z_0-\frac{\omega_{||}}{\varkappa}. \tag{2.2.40}$$

Как видно, корни λ, μ и ν находятся из уравнения

$$z^3+b_2z^2+b_1z+b_0=0. \tag{2.2.41}$$

Решение кубических уравнений приведено в [5].Введем обозначения

$$q=\frac{b_1}{3}-\frac{b_2^2}{9},\quad r=\frac{b_1b_2-3b_0}{6}-\frac{b_2^3}{27};\qquad D=q^3+r^2 \tag{2.2.42}$$

– дискриминант кубического уравнения.

Пусть

$$s_1=\big(r+\sqrt{D}\big)^{1/3},\quad s_2=\big(r-\sqrt{D}\big)^{1/3}; \tag{2.2.43}$$

тогда

$$\begin{aligned} z_1&=(s_1+s_2)-\frac{b_2}{3},\\ z_2&=-\frac{s_1+s_2}{2}-\frac{b_2}{3}+i\frac{\sqrt{3}}{2}(s_1-s_2),\\ z_3&=-\frac{s_1+s_2}{2}-\frac{b_2}{3}-i\frac{\sqrt{3}}{2}(s_1-s_2)\end{aligned} \tag{2.2.44}$$

– корни уравнения (2.2.41).

Если $D > 0$, то имеется один вещественный корень и два комплексно сопряженных. Если $D = 0$, то все корни вещественны и по крайней мере два из них равны. Если $D < 0$, то все корни вещественны (неприводимый случай).

В нашем случае коэффициенты b_0, b_1, b_2 имеют вид (2.2.40), поэтому

$$r = \frac{8}{3}b_0^2\delta^3 - \frac{1}{2}b_0 - \frac{64}{27}b_0^3\delta^6, \quad D = \frac{1}{4}b_0^2 - \frac{8}{27}b_0^3\delta^3. \tag{2.2.45}$$

Исследуем знак дискриминанта D. Подставляя (2.2.40) в (2.2.45), имеем

$$D = \frac{1}{32c^3}\frac{1}{K^2K_{||}}\left[1 - \frac{4}{27}\frac{(u_{z0} - K_{||})^3}{K^2K_{||}}\right], \tag{2.2.46}$$

где

$$K_{||} = \frac{\omega_{||}}{c\varkappa}, \tag{2.2.47}$$

а K и u_{z0} определяются (1.3.1).

Из выражения для корней (2.2.44) видно, что существует граничная скорость электрона $(u_{z0})_m$, при которой дискриминант D меняет знак. Эта скорость определяется из равенства

$$D = 0. \tag{2.2.48}$$

Отсюда

$$(u_{z0})_m = K_{||} + \left(\frac{27}{4}K^2K_{||}\right)^{1/3}. \tag{2.2.49}$$

При $u_{z0} \geqslant (u_{z0})_m$ $D \leqslant 0$ и реализуется решение (2.2.24) (1-й случай). При $u_{z0} < (u_{z0})_m$ $D > 0$ и реализуется решение (2.2.37) (3-й случай). Для того чтобы реализовалось решение (2.2.31) (2-й случай, $\lambda = \mu = \nu$), как видно из (2.2.44), необходимо чтобы одновременно выполнялись равенства

$$s_1 = 0, \quad s_2 = 0, \tag{2.2.50}$$

или, учитывая (2.2.43),

$$r = 0, \quad D = 0. \tag{2.2.51}$$

Так как r и D определяются выражениями (2.2.45), то можно заключить, что равенства (2.2.50) и (2.2.51) не могут выполняться одновременно ни при каких параметрах системы и начальной скорости электрона. Поэтому ремение (2.2.31) никогда не осуществляется в реальных системах и рассматривать его больше не будем.

2.3 АМПЛИТУДА КОЛЕБАНИЙ РАДИУСА ЭЛЕКТРОННОЙ ОРБИТЫ

Найдем отклонение электрона от равновесной орбиты накопительного кольца в зависимости от длины пролета через ондулятор, т.е. найдем $\rho(z)$. С помощью соотношений (2.2.2) и (2.2.4) получаем связь между ρ и r

$$\rho^2 = x^2+y^2 = \left(\tilde{x}-\frac{\dot{y}_0}{\omega_{||}}\right)^2+\left(\tilde{y}+\frac{\dot{x}_0+\omega_\perp/\varkappa}{\omega_{||}}\right)^2 = r^2+2\frac{cu_{\perp 0}}{\omega_{||}}r\sin(\theta+\varphi_0)-\frac{c^2u_{\perp 0}^2}{\omega_{||}^2}, \tag{2.3.1}$$

где $u_{\perp 0}$ и φ_0 определяются (1.3.4). Из соотношений (2.2.5), (2.2.6) и (2.2.7) можно выразить r и θ через σ

$$r = \sqrt{\frac{-2\sigma}{\varkappa\omega_{||}}}, \quad \theta = \varkappa z - \arccos\left[\sqrt{\frac{\varkappa}{2\omega_\perp^2\omega_{||}}}\frac{(\sigma+\dot{z}_0)\sigma'}{\sqrt{-\sigma}}\right], \tag{2.3.2}$$

штрих означает производную по z, $\sigma' = d\sigma/dz$. Здесь использовано, что

$$\dot{\sigma} = \frac{d\sigma}{dz}\frac{dz}{d\tau} = \sigma'(\sigma+\dot{z}_0). \tag{2.3.3}$$

Таким образом, если найдем $\sigma(z)$, то по формулам (1.3.1) и (2.3.2) можно определить $\rho(z)$.

Рассмотрим 1-й случай (все корни λ, μ, ν вещественные). Из (2.2.22) имеем

$$u = F(\varphi_\sigma \backslash m), \tag{2.3.4}$$

где φ_σ определяется (2.2.21).

Подставляя (2.3.4) в (2.2.24) находим связь между z и σ

$$z = \frac{1}{A\nu}\left[(1+\nu\dot{z}_0)F(\varphi_\sigma\backslash m) - \Pi(n;\varphi_\sigma\backslash m)\right]. \tag{2.3.5}$$

В 3-м случае (один вещественный корень и два комплексно сопряженных) из (2.2.35) и (2.2.36)

$$w = F(\psi_\sigma\backslash m), \tag{2.3.6}$$

где ψ_σ определяется из (2.2.35). Подставляя (2.3.6) в (2.2.37) находим

$$z = \frac{1}{Cb}\Big\{(1+b\dot{z}_0)F(\psi_\sigma\backslash m)+\frac{1}{2}\frac{a}{b-a}\Pi(l;\psi_\sigma\backslash k)- \\ -\frac{1}{2}\frac{b}{b-a}\frac{1}{\sqrt{l-k}}\,\mathrm{arcth}\big[\sqrt{l-k}\,\mathrm{sd}(2w|k)\big]\Big\}. \tag{2.3.7}$$

Как видно, из соотношений (2.3.5) и (2.3.7) не удается получить явную зависимость $\sigma = \sigma(z)$. В некоторых случаях можно сделать приближения, позволяющие разрешить эти уравнения относительно σ и, стало быть, найти приближенную зависимость $\rho = \rho(z)$.

Рассмотрим наиболее часто встречающийся случай, когда

$$u_{z0} \geq 1, \quad \omega \gg \omega_{\perp}, \quad \omega \gg \omega_{||}, \tag{2.3.8}$$

где $\omega \equiv 2\pi c/\lambda$, λ – период ондулятора. Тогда из выражений (2.2.40) и (2.2.45) следует, что дискриминант $D < 0$. Этому случаю соответствует соотношение (2.3.5), из которого имеем

$$F(\varphi_\sigma \backslash m) = \frac{A}{\dot{z}_0 + 1/\nu}\left[z + \frac{\Pi(n;\varphi_\sigma\backslash m)}{A\nu}\right]. \tag{2.3.9}$$

Используя выражения (2.2.23) и (2.2.24), получаем

$$\frac{1}{A\nu} \simeq \frac{24}{\pi}\frac{1}{u_{z0}^3}\frac{\omega_\perp^2\omega_{||}}{\omega^3}\lambda \ll \lambda, \tag{2.3.10}$$

т.е. вкладом второго слагаемого в правой части (2.3.9) можно пренебречь. Поэтому, учитывая выражения (2.2.21) и (2.2.23), находим

$$\sigma(z) \simeq -\frac{6c}{\gamma^2\beta_{z0}^2}\frac{\omega_\perp^2\omega_{||}}{\omega^3}\frac{\sin^2\dfrac{\varkappa z}{2}}{3-\sin^2\dfrac{\varkappa z}{2}}. \tag{2.3.11}$$

Теперь, зная $\sigma(z)$, по формулам (2.3.1), (2.3.2) можно определить $\rho(z)$.

3 ЭЛЕКТРОН В ПОЛЕ СТОЯЧЕЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

3.1 ЗАКОН ДВИЖЕНИЯ

Исследуем движение электронного пучка в поле электромагнитной волны

$$\vec{E} = E(-\vec{e}_x + \vec{e}_y)\cos(\omega t - \varkappa z), \quad \vec{H} = -E(\vec{e}_x + \vec{e}_y)\cos(\omega t - \varkappa z). \tag{3.1.1}$$

При численном решении этой задачи оказывается, что зависимость от z не оказывает существенного влияния на движение электрона и траектория определяется главным образом временной зависимостью. Поэтому в некоторых случаях для исследования качественного характера движения можно использовать поле стоячей усредненной электромагнитной волны

$$\vec{E} = \frac{E}{\sqrt{2}}(-\vec{e}_x + \vec{e}_y)\cos\omega t, \quad \vec{H} = -\frac{E}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x + \vec{e}_y)\cos\omega t. \tag{3.1.2}$$

Если считать электронный пучок нерелятивистским, то можно пренебречь влиянием силы Лоренца на траекторию электронов. После подстановки поля (3.1.2) в систему уравнений Максвелла-Лоренца (1.2.1) приходим к следующей системе нелинейных дифференциальных уравнений 2-го порядка.

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} c\gamma\omega\cos\omega t, \\ \ddot{y} = -\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} c\gamma\omega\cos\omega t, \\ \ddot{z} = 0, \\ c\dot{\gamma} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\omega(\dot{x}-\dot{y})\cos\omega t, \end{cases} \tag{3.1.3}$$

где

$$\varepsilon = \frac{|e|E}{m\omega c} \tag{3.1.4}$$

– параметр волны. Начальные условия опять будем считать такими же, как (1.2.7), (1.2.8). Заметим, что

$$\dot{t} = \frac{dt}{d\tau} = \gamma(t), \tag{3.1.5}$$

поэтому, интегрируя один раз первые три уравнения системы (3.1.3), получаем

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{x}_0 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} c\sin\omega t, \\ \dot{y} = \dot{y}_0 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} c\sin\omega t, \\ \dot{z} = \dot{z}_0, \\ c\dot{\gamma} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\omega(\dot{x}-\dot{y})\cos\omega t. \end{cases} \tag{3.1.6}$$

Подставляя первые два уравнения этой системы в последнее, имеем

$$c\gamma\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\omega\left[(\dot{x}_0-\dot{y}_0)+\sqrt{2}\varepsilon c\sin\omega t\right]\cos\omega t.$$

Здесь использовано, что

$$\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt}\dot{t} = \gamma\frac{d\gamma}{dt}. \tag{3.1.7}$$

После интегрирования находим

$$\gamma(t) = \sqrt{\gamma_0^2 + \frac{\sqrt{2}\varepsilon}{c}(\dot{x}_0-\dot{y}_0)\sin\omega t + \varepsilon^2\sin^2\omega t}, \tag{3.1.8}$$

где

$$\gamma_0 = \gamma|_{t=0}. \tag{3.1.9}$$

Для упрощения дальнейших выкладок положим

$$\dot{x}_0 = \dot{y}_0. \tag{3.1.10}$$

Из системы (3.1.6) и из соотношения (3.1.5) имеем

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\dot{z}_0}{\gamma(t)},$$

отсюда определение зависимости $z(t)$ сводится к вычислению интеграла

$$z(t) = \int\limits_0^t \frac{\dot{z}_0\, d\xi}{\sqrt{\gamma_0^2 + \varepsilon^2 \sin^2 \omega\xi}}. \tag{3.1.11}$$

После замены переменной

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{1+p^2}\sin\omega\xi}{\sqrt{1+p^2\sin^2\omega\xi}}, \quad p = \frac{\varepsilon}{\gamma_0} \tag{3.1.12}$$

приходим к эллиптическому интегралу 1-го рода

$$z(t) = \frac{\dot{z}_0}{\omega}\frac{\sqrt{1-m}}{\gamma_0}F(\varphi\backslash m), \tag{3.1.13}$$

где

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{1+p^2}\sin\omega t}{\sqrt{1+p^2\sin^2\omega t}}, \quad m = \frac{p^2}{1+p^2} = \frac{\varepsilon^2}{\gamma^2+\varepsilon^2} \quad (0 < m < 1) \tag{3.1.14}$$

– параметр эллиптического интеграла $F(\varphi\backslash m)$ (см. приложение А.1).

Опять учитывая соотношение (3.1.5), после интегрирования первых двух уравнений системы (3.1.6), находим закон движения

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{c}{\omega}\left[\arcsin\sqrt{m} - \arcsin(\sqrt{m}\cos\omega t)\right], \\ y(t) = -x(t), \\ z(t) = \dfrac{\sqrt{1-m}}{\gamma_0}\dfrac{\dot{z}_0}{\omega}F(\varphi\backslash m). \end{cases} \tag{3.1.15}$$

3.2 СМЕЩЕНИЕ ЭЛЕКТРОНА

Найдем отклонение электрона от первоначального направления распространения в зависимости от длины пролета области взаимодействия. Отклонение электрона обозначим через $\rho(z)$, $\rho^2 = x^2+y^2$. Из (3.1.13), (3.1.14) имеем

$$\sin\omega t = \sqrt{1-m}\,\mathrm{sd}\Big(\frac{\gamma_0\omega z}{\sqrt{1-m}\,\dot{z}_0}|m\Big), \quad \cos\omega t = \mathrm{cd}\Big(\frac{\gamma_0\omega z}{\sqrt{1-m}\,\dot{z}_0}|m\Big), \tag{3.2.1}$$

где

$$\mathrm{sd}(u|m) = \frac{\mathrm{sn}(u|m)}{\mathrm{dn}(u|m)}, \quad \mathrm{cd}(u|m) = \frac{\mathrm{cn}(u|m)}{\mathrm{dn}(u|m)}$$

– эллиптические функции Якоби. Подставляя (3.2.1) в закон движения (3.1.15), находим

$$\rho^2(z) = 2x^2(z) = \frac{c}{\omega}\left\{\arcsin\sqrt{m} - \arcsin\Big[\sqrt{m}\,\mathrm{cd}\Big(\frac{\gamma_0\omega z}{\sqrt{1-m}\,\dot{z}_0}|m\Big)\Big]\right\}. \quad (3.2.2)$$

Отсюда можно получить выражение и для энергии $\mathcal{E} = mc^2\gamma = \mathcal{E}(z)$

$$\gamma(z) = \gamma_0(z)\sqrt{1 + m\,\mathrm{sd}^2\Big(\frac{\gamma_0\omega z}{\sqrt{1-m}\,\dot{z}_0}|m\Big)}. \quad (3.2.3)$$

Зная зависимость $\gamma(z)$ можно определить эффективную длину области взаимодействия, при которой энергетические потери электрона будут максимальными, т.е. будет происходить наибольшее усиление излучения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем основные результаты, полученные в дипломе.

1. Получено аналитическое решение уравнений движения электрона в приближенном магнитостатическом поле спирального ондулятора, а также отклонение электрона от оси магнитной системы в зависимости от длины пролета через ондулятор при произвольных начальных условиях.

2. Найден аналитический вид закона движения электрона в приближенном магнитостатическом поле спирального ондулятора с учетом ведущего магнитного поля накопительного кольца при произвольных начальных условиях. Проведен анализ зависимости амплитуды колебаний радиуса электронной орбиты от длины пролета области взаимодействия.

3. Получено аналитическое решение системы уравнений Максвелла-Лоренца для электрона в поле стоячей элекромагнитной волны, а также отклонение электрона от первоначального направления распространения в зависимости от длины пролета области взаимодействия. Проведенное сравнение полученных аналитических результатов с результатами численного интегрирования показало хорошее их совпадение.

4. Результаты первых двух частей были представлены на конференции отделения ядерной физики, проходившей в Москве 16-20 ноября 1998 года.

Выражаю благодарность доктору физ.- мат. наук Хапаеву А. М. и кандидату физ.- мат. наук Терновскому В. В. за помощь и внимание к работе.

A МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРИЛОЖЕНИЕ

Все формулы приводятся в соответствии с обозначениями [5].

A.1 РАВНОМЕРНЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ I_n, K_n, I'_n, K'_n ПРИ БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЯХ ПОРЯДКА

$$
\begin{aligned}
I_\nu(\nu z) &\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}}\frac{e^{\nu\eta}}{(1+z^2)^{1/4}}\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u_k(t)}{\nu^k}\right],\\
K_\nu(\nu z) &\sim \sqrt{\frac{\pi}{2\nu}}\frac{e^{-\nu\eta}}{(1+z^2)^{1/4}}\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{u_k(t)}{\nu^k}\right],\\
I'_\nu(\nu z) &\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}}\frac{(1+z^2)^{1/4}}{z}e^{\nu\eta}\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{v_k(t)}{\nu^k}\right],\\
K'_\nu(\nu z) &\sim -\sqrt{\frac{\pi}{2\nu}}\frac{(1+z^2)^{1/4}}{z}e^{-\nu\eta}\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{v_k(t)}{\nu^k}\right],
\end{aligned}
$$

где

$$\eta=\sqrt{1+z^2}+\ln\frac{z}{1+\sqrt{1+z^2}},\quad t=\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$$

и $u_k(t)$, $v_k(t)$ задаются формулами

$$
\begin{aligned}
&u_0(t)=1,\quad u_1(t)=\frac{3t-5t^3}{24},\quad u_2(t)=\frac{81t^2-462t^4+385t^6}{1152},\ \dots,\\
&u_{k+1}(t)=\frac{1}{2}t^2(1-t^2)u'_k(t)+\frac{1}{8}\int\limits_0(1-5t^2)u_k(t)dt\quad (k=0,1,2,\dots),\\
&v_0(t)=1,\quad v_1(t)=\frac{-9t+7t^3}{24},\quad v_2(t)=-\frac{135t^2+594t^4-455t^6}{1152},\ \dots,\\
&v_k(t)=u_k(t)+t(t^2-1)\left[\frac{1}{2}u_{k-1}(t)+tu'_{k-1}(t)\right]\quad (k=1,2,3,\dots).
\end{aligned}
$$

Когда $\nu\to+\infty$ эти разложения равномерны по z в секторе $|\arg z|\leqslant\frac{1}{2}\pi-\varepsilon$, где ε – произвольное положительное число.

Из этих разложений имеем

$$I_n(n\varkappa\rho)K'_n(n\varkappa a)\sim-\frac{1}{2n}\frac{e^{-n(\eta_a-\eta_\rho)}}{\varkappa a}\left(\frac{1+\varkappa a}{1+\varkappa\rho}\right)^{1/4},$$

где

$$\eta_a=\eta|_{z=\varkappa a},\quad \eta_\rho=\eta|_{z=\varkappa\rho}.$$

Отсюда видно, что основной вклад в сумму рядов (1.1.1) вносят слагаемые с $n=1$.

A.2 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ И НЕКОТОРЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Эллиптический интеграл 1-го рода

$$u = F(\varphi\backslash m) = F(\varphi|m) = \int\limits_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m\sin^2\theta}} =$$

$$= \int\limits_0^{x} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-mt^2)}}, \quad x = \sin\varphi = \mathrm{sn}(u|m),$$

где m – параметр, $\varphi = \mathrm{am}(u|m) = \arcsin \mathrm{sn}(u|m)$ – амплитуда, (определение $\mathrm{sn}(u|m)$ см. ниже).

Эллиптический интеграл 2-го рода

$$E(\varphi\backslash m) = E(u|m) = \int\limits_0^{\varphi} \sqrt{1 - m\sin^2\theta}\, d\theta = \int\limits_0^{x} \sqrt{\frac{1-mt^2}{1-t^2}}\, dt, \quad x = \sin\varphi = \mathrm{sn}(u|m).$$

Эллиптический интеграл 3-го рода

$$\Pi(n;\varphi\backslash m) = \Pi(n;u|m) = \int\limits_0^{\varphi} \frac{d\theta}{(1-n\sin^2\theta)\sqrt{1-m\sin^2\theta}} =$$

$$= \int\limits_0^{x} \frac{dt}{(1-nt^2)\sqrt{(1-t^2)(1-mt^2)}}, \quad x = \sin\varphi = \mathrm{sn}(u|m),$$

где n – характеристика.

Эллиптические функции Якоби

$$\sin\varphi = \mathrm{sn}(u|m), \quad \cos\varphi = \mathrm{cn}(u|m), \quad \Delta(\varphi) = \sqrt{1 - m\sin^2\varphi} = \mathrm{dn}(u|m).$$

В приведенном выше определении амплитуда $\varphi = \mathrm{am}(u|m)$ заключается в пределах от $-\pi/2$ до $\pi/2$. Условимся, однако, в нашем изложении для удобства считать, что

$$\varphi = \mathrm{am}(u|m) = \mathrm{Arcsin}\, \mathrm{sn}(u|m),$$

где

$$\alpha = \mathrm{Arcsin}\, x = (-1)^k \arcsin x + \pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

– общее решение уравнения $\sin\alpha = x$, т.е. амплитуда φ, таким образом, может принимать произвольные значения.

Список литературы

[1] Blewett J. P.,Chasman R. Orbits and fields in the helical wiggler. Journal of Applied Physics, 1977, No 7, Vol. 48, p. 2692-2698.

[2] Schlueter R. D. Wiggler and undulator insertion devices. University of California, Lawrence Berkely Laboratory, May, 1994.

[3] Boni R., Savoia A., Spataro B., Tazzioli F., Fabbricatore P., Parodi R., Fernandes P. Superconducting microwave undulator. Laboratori Nazionali di Frascati. November, 1988.

[4] Бухгольц Г. Расчет электрических и магнитных полей. М., Издательство иностранной литературы, 1961.

[5] Справочник по специальным функциям. Под ред. Абрамовица М. и Стиган И. М., Наука, 1979.

[6] Диденко А.Н., Кожевников А.В. Лазеры на свободных электронах и перспективы их развития. Известия вузов, Физика, 1983, No 3, с. 12-25.

[7] Ахиезер Н.И. Элементы теории эллиптических функций. М.-Л., ОГИЗ, Гостехиздат, 1948.

[8] Тернов И.М., Михайлин В.В., Халилов В.Р. Синхротронное излучение и его применения. М., Издательство МГУ, 1985.

[9] Хапаев А.М., Володин Б.А. О моделировании динамики зарядов в системе типа вигглера с ведущим магнитным полем. Математическое моделирование, 1994, No 7, том 6, с. 103-115.

[10] Терновский В.В., Хапаев А.М. Динамика заряда в поле вигглера. М., Диалог-МГУ, 1998.

[11] Терновский В.В. О постановке и решении одной задачи теории нелинейных колебаний. Дипломная работа. МГУ, 1985.