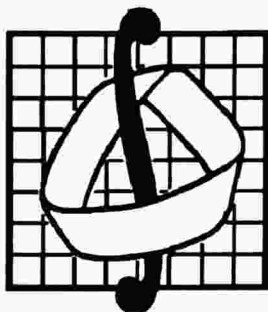


**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА**



Механико-математический факультет

**СОВРЕМЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
В МАТЕМАТИКЕ И МЕХАНИКЕ**

*Труды XXIII Конференции молодых ученых
механико-математического факультета МГУ
(9–14 апреля 2001 г.)*

II

Москва 2001 год

После генерации параметров требований находилось оптимальное расписание методом ветвей и границ и подсчитывалось количество вершин в дереве подходящих расписаний. Результаты представлены на рис. 1 (где «Алг 1» — алгоритм обхода дерева во фронт, «Алг 2» — алгоритм обхода дерева в глубину). Для каждого $n < 600$ проводилось 1000 экспериментов.

Как видно из графиков, для всех распределений и способов обхода дерева, кроме биномиального при обходе «в глубину», количество вершин в дереве подходящих расписаний линейно зависит от количества требований для NP -трудной задачи. То есть вероятность сгенерировать «трудный» пример мала, что позволяет использовать известные методы ветвей и границ для решения практических задач.

- [1] GRAHAM R. L., LAWLER E. L., LENSTRA J. K., RINNOOY KAN A. H. G. Optimization and approximation in deterministic sequencing and scheduling: a survey. *Ann. Discr. Optimiz.* — 1979. — N 2. — 287–325.
- [2] DU J. AND LEUNG J. Y.-T. Minimizing total tardiness on one processor is NP -hard. *Math. Oper. Res.* — 1990. — N 15. — 483–495.
- [3] ЛАЗАРЕВ А. А. Эффективные алгоритмы решения некоторых задач теории расписаний для одного прибора с директивными сроками обслуживания требований. Дисс. — 1989.

УДК 532.31:538.65

Сила, действующая на тело в сферическом сосуде с диэлектрической непроводящей жидкостью в электрическом поле

А. С. Квитанцев

Московский государственный университет

Введение. Явление левитации постоянного магнита в магнитной жидкости впервые обнаружено Р. Розенцвейгом [1]. Это явление состоит в том, что при помещении магнита в сосуд с магнитной жидкостью магнит оказывается не на дне сосуда, а висит в некоторой точке жидкости. То же самое может наблюдаться и с немагнитным телом, если при этом наложить еще внешнее магнитное поле. Под внешним подразумевается поле, не искаженное магнитной жидкостью и телом. Внешнее магнитное поле может быть и однородным, тем не менее левитация все равно может

наблюдаться. Это обусловлено тем, что жидкость имеет границы, которые искажают внешнее магнитное поле, и в результате поле вблизи тела становится несимметричным. В силу аналогии уравнений феррогидродинамики (ФГД) и электрогидродинамики (ЭГД) для непроводящих сред следует ожидать, что диэлектрическое тело в ограниченном объеме диэлектрической жидкости в присутствии однородного внешнего электрического поля также будет зависеть в некоторой точке равновесия. Именно этот случай и рассмотрен в настоящей работе. Вычисление этой силы в общем случае является сложной задачей. Аналитическое вычисление сил в ФГД для постоянного магнита проведено только для цилиндрического магнита в цилиндрическом сосуде [2] и для магнита произвольной формы в сферическом сосуде достаточно большого размера [3].

В данной работе получена формула для электрической силы, действующей на сферическое тело в сферическом сосуде, заполненном диэлектрической непроводящей жидкостью, в однородном внешнем электрическом поле. Размеры тела и сосуда произвольные, диэлектрические проницаемости жидкости, материала тела и окружающей среды считаются постоянными и произвольными. Задача решается для случая малых смещений тела из центра сосуда и произвольных диэлектрических проницаемостей всех сред, а также в безындукционном приближении для произвольных смещений тела.

1. Постановка задачи. Предположим, что сферическое диэлектрическое тело радиуса R_1 находится внутри сферического сосуда радиуса R_2 , заполненного несжимаемой, однородной, непроводящей диэлектрической жидкостью. Диэлектрические проницаемости тела, жидкости и окружающей среды считаются постоянными и равными ϵ_b , ϵ_f и ϵ_s соответственно. Приложенное электрическое поле E_0 постоянно и направлено вдоль оси z . Вектор l соединяет центр сосуда с центром тела. Сила, действующая на тело, обусловленная наличием электрического поля, вычисляется интегрированием тензора напряжений Максвелла по поверхности тела S_1 : $F_i = (\epsilon_f/4\pi) \int_{S_1} (E_i E_k - 0,5 E^2 \delta_{ik}) n_k dS$. Здесь E — электрическое поле в жидкости.

В приближении ЭГД $\text{rot} E_i = 0$, $\text{div} D_i = 0$, $D_i = \epsilon_i E_i$. Индексом i обозначены величины, относящиеся к телу (b), жидкости (f) и окружающей среде (s) соответственно. Отсюда $E_i = -\nabla \psi_i$, а для нахождения потенциала ψ_i получаем следующие условия:

- $\Delta \psi_b = 0$, $\Delta \psi_f = 0$, $\Delta \psi_s = 0$;
- на поверхности тела S_1 : $\psi_b = \psi_f$, $\epsilon_b \frac{\partial \psi_b}{\partial n} = \epsilon_f \frac{\partial \psi_f}{\partial n}$;
- на поверхности сосуда S_2 : $\psi_f = \psi_s$, $\epsilon_f \frac{\partial \psi_f}{\partial n} = \epsilon_s \frac{\partial \psi_s}{\partial n}$;
- на бесконечности: $-\nabla \psi_s \rightarrow E_0$.

Здесь предполагается отсутствие двойных электрических слоев на границах жидкости.

2. Решение при малых смещениях тела. Пусть отклонение центра тела от центра сосуда мало: $l/R_2 \ll 1$. Решив в этом приближении выписанную выше краевую задачу для потенциала ψ и проинтегрировав тензор напряжений Максвелла по поверхности тела S_1 , получим выражение для силы в первом приближении по малому параметру l/R_2 :

$$\mathbf{F} = -K\mathbf{l} - K \frac{(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{l})\mathbf{E}_0}{3E_0^2},$$

где

$$K = \frac{E_0^2 R_1^6}{\epsilon^2 R_2^5} \frac{\epsilon_f \epsilon_s^2 (\epsilon_f - \epsilon_s)(\epsilon_f - \epsilon_b)^2}{2\epsilon_f + 3\epsilon_s - 6 \frac{(\epsilon_f - \epsilon_b)(\epsilon_f - \epsilon_s)}{3\epsilon_f + 2\epsilon_b} \frac{R_1^5}{R_2^2}},$$

$$3\epsilon' = \epsilon_f(2\epsilon_s + \epsilon_b) + \frac{2}{3}(\epsilon_f - \epsilon_b)(\epsilon_f - \epsilon_s) \left(1 - \frac{R_1^3}{R_2^3}\right).$$

Из полученной формулы видно, что сила $\mathbf{F}$ не параллельна вектору смещения $\mathbf{l}$. В случае $\epsilon_f > \epsilon_s$ сила направлена так, что заставляет тело возвращаться в центр сосуда, при этом положение равновесия тела устойчиво относительно малых отклонений. В случае $\epsilon_f < \epsilon_s$ положение равновесия неустойчиво и левитация тела в сосуде невозможна. Сила нелинейно зависит от диэлектрической проницаемости жидкости и имеет максимум при некотором значении ϵ_f . Например, при $\epsilon_b = \epsilon_s = 1$ и $R_1/R_2 \ll 1$ этот максимум достигается при $\epsilon_f^{\max} = 8,88$, а при $R_1/R_2 \rightarrow 1$ $\epsilon_f^{\max} = 2,7$.

3. Решение в безындукционном приближении. Пусть $\epsilon_b = \epsilon_s = 1$, а диэлектрическая проницаемость жидкости $\epsilon_f = \epsilon$ мало отличается от единицы: $\epsilon - 1 \ll 1$. Можно показать, что в этом приближении сила, действующая на тело в сосуде, заполненном диэлектрической жидкостью, в котором в отсутствие тела однородное внешнее поле создает однородное же поле внутри сосуда (это верно для сосудов сферической и эллипсоидальной формы), вычисляется по формуле $F_i = -\frac{\epsilon-1}{8\pi} \int_{S_1} E_b^2 n_i dS \cdot [1 + O(\epsilon-1)]$. Здесь $\mathbf{E}_b$ — искажение однородного внешнего поля телом, погруженным в неограниченную диэлектрическую жидкость.

Используя эту формулу, вычислим в безындукционном приближении силу и момент сил, действующие на сферическое тело в сферическом сосуде:

$$\mathbf{F} = \frac{(\epsilon-1)p_b^2}{8R_2^4} \left\{ \left[f_1(a) + f_2(a) \frac{(\mathbf{p}_b \cdot \mathbf{l})^2}{p_b^2 l^2} \right] \frac{\mathbf{l}}{l} + f_3(a) \frac{(\mathbf{p}_b \cdot \mathbf{l})\mathbf{p}_b}{p_b^2 l} \right\}, \quad \mathbf{M} = 0,$$

где $p_b = (\epsilon - 1)E_0 R_1^3 / 3$, $a = l / R_2$. Здесь введены обозначения:

$$f_1 = 2L + 3N, \quad f_2 = 3(2L - 5N - 2al), \quad f_3 = 6(al + N),$$

$$L = -\frac{4a}{(1-a^2)^4}, \quad I = \frac{4}{3} \frac{1}{(1-a^2)^4},$$

$$N = -\frac{1}{8a^4} \ln \frac{1+a}{1-a} + \frac{(1+a^2)(3-14a^2+3a^4)}{12a^3(1-a^2)^4}.$$

Полученная формула верна для произвольных отклонений центра тела от центра сосуда. Максимальная сила достигается вблизи поверхности сосуда, когда $l = R_2 - R_1$ и вектор эффективного дипольного момента тела p_b параллелен смещению.

- [1] ROSENSWEIG R. E. Buoyancy and stable levitation of a magnetic body immersed in magnetizable fluid. *Nature*. — 1966. — 210. — 613–614.
- [2] ЦЕБЕРС А. О. Левитация постоянного цилиндрического магнита в ФЖ. — В кн.: Девятое Рижское совещание по магнитной гидродинамике, 1978, Саласпилс. — 129–130.
- [3] НАЛЕТОВА В. А., МОИСЕЕВА Л. А., ТУРКОВ В. А. Левитация магнита в магнитной жидкости в сферическом сосуде. *Вестн. Моск. ун-та. Сер. Матем. Механ.* — 1997. — № 4. — 31–34.

УДК 519.72

Полное описание неуравновешенных корреляционно-иммунных порядка 5 булевых функций от 9 переменных

Д. П. Кириенко

Московский государственный университет

Рассматривается векторное пространство F_2^n , $F_2 = \{0; 1\}$. Булева функция от n переменных — это отображение из F_2^n в F_2 . Вес двоичного вектора x (обозначается $|x|$) — это число единиц в x . Вес $wt(f)$ функции f на F_2^n — это число таких наборов x из F_2^n , что $f(x) = 1$. Функция f называется *уравновешенной*, если $wt(f) = wt(f \oplus 1) = 2^{n-1}$, иначе функция называется *неуравновешенной*. Подфункция булевой функции f — это функция f' от меньшего числа переменных, полученная подстановкой в f некоторых констант вместо некоторых переменных.