

# ВЛИЯНИЕ ВЫТЯНУТОСТИ ЧАСТИЦ ДИСПЕРСНОЙ ФАЗЫ НА ТЕРМОМАГНИТОФОРЭЗ В МАГНИТНЫХ СУСПЕНЗИЯХ

*A.C. Квитанцев*

**1. Введение.** Вычислению сил, действующих со стороны электромагнитного поля на тела в изотермических жидкостях, посвящено много работ. Соответствующие процессы переноса частиц — электро-, электромагнито-, диэлектро- и магнитофорез — хорошо изучены и находят широкое применение. На частицу в неизотермической жидкости действует тепловая сила, вызывающая термофорез. Наличие обоих факторов — электромагнитного поля и градиента температуры приводит к появлению новых типов сил и соответствующих процессов фореза, ещё недостаточно хорошо изученных.

Пусть в намагничивающейся жидкости имеется градиент температуры и приложено магнитное поле. Тогда, как теоретически показано в [1], на частицу в такой жидкости, помимо тепловой и магнитной сил, действует ещё и термомагнитная сила, вызывающая соответствующий процесс переноса частиц — термомагнитофорез. Влияние термомагнитного переноса частиц дисперсной фазы на массообмен исследовалось экспериментально [2–3] и теоретически [4]. В имеющихся работах по вычислению термомагнитной силы диспергированные частицы для упрощения расчётов считались сферическими. Однако из-за магнитного взаимодействия между частицами возникают агрегаты частиц, имеющие форму, вытянутую вдоль направления местного магнитного поля. В представляемой работе получена формула для термомагнитной силы, действующей на вытянутые частицы. Проведён анализ влияния анизотропии формы частиц на направление и интенсивность их переноса.

**2. Постановка задачи.** Пусть твёрдая частица находится в неограниченном объёме вязкой несжимаемой магнитной жидкости при наличии приложенного магнитного поля и градиента температуры. Из-за неоднородности нагрева в жидкости имеется градиент магнитной проницаемости. Вследствие этого, в объёме жидкости возникают вихревые силы со стороны магнитного поля. Поэтому магнитное поле оказывает силовое воздействие на частицу как непосредственно, так и через вызываемое им движение жидкости. Полная сила, действующая на частицу, представляется в виде:

$$\mathbf{F} = \oint_S (-p \mathbf{n} + \eta \mathbf{e}_n + \mathbf{T}_n) dS + \rho^{(i)} V \mathbf{g}, \quad (1)$$

где  $p$  — давление в жидкости,  $\eta$  — коэффициент сдвиговой вязкости,  $\rho^{(i)}$  — массовая плотность частицы,  $V$  — её объём,  $\mathbf{g}$  — ускорение свободного падения,  $\mathbf{e}_n = e_{ik} n_k \mathbf{i}_i$  и  $\mathbf{T}_n = T_{ik} n_k \mathbf{i}_i$  — проекции тензора скоростей деформаций  $e_{ik}$  и тензора магнитных напряжений в жидкости  $T_{ik}$  на единичный вектор внешней нормали  $\mathbf{n}$  к поверхности частицы  $S$ . Будем считать, что частица вытянута вдоль приложенного магнитного поля. Форму частицы аппроксимируем эллипсоидом вращения, рис. 1. Величину приложенного магнитного поля положим достаточно малой, чтобы магнитная проницаемость жидкости не зависела от него. Поскольку значительный интерес представляют ферромагнитные частицы, зависимость магнитной проницаемости частицы от магнитного поля будет учитываться. Плотности частицы и жидкости однородны:  $\nabla \rho^{(i)} = 0$ ,  $\nabla \rho^{(e)} = 0$ . Таким образом, можно записать:  $\mu^{(i)} = \mu^{(i)}(H, T)$ ,  $\mu^{(e)} = \mu^{(e)}(T)$ . Пусть применимо приближение феррогидродинамики, электрические токи и токи смещения малы. Магнитную часть тензора напряжений выберем в виде:  $T_{ik} = \mu H_i H_k / 4\pi - \mu H^2 \delta_{ik} / 8\pi$ . Для нахождения величин, входящих в подынтегральное выражение (1), имеем уравнения:

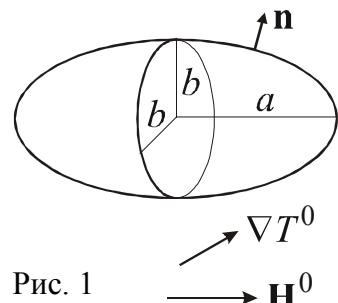


Рис. 1

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}^{(i,e)} = 0, \quad \operatorname{div} \mu^{(i,e)} \mathbf{H}^{(i,e)} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad 0 = -\nabla p - \frac{H^{(e)2}}{8\pi} \nabla \mu^{(e)} + \eta \Delta \mathbf{v} + \rho^{(e)} \mathbf{g}, \quad (2)$$

$$[H_\tau] = 0, \quad [\mu H_n] = 0, \quad \mathbf{v} = 0 \quad \text{на поверхности частицы } S, \quad (3)$$

$$\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}^0, \quad p \rightarrow p^0, \quad \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}^0 \quad \text{на физической бесконечности.} \quad (4)$$

Квадратные скобки означают, что берётся скачок заключённой в них величины при переходе через поверхность частицы. Верхними индексами  $(i)$  и  $(e)$  отмечены параметры в области частицы и в области жидкости соответственно, а верхним индексом  $0$  — невозмущённые частицей параметры. При написании этих уравнений сделаны следующие допущения. Все процессы являются установившимися, а течение жидкости медленное. Первое предположение означает, что все параметры не зависят от времени:  $\partial / \partial t = 0$ , а второе — конвективным переносом параметров можно пренебречь:  $\mathbf{v} \cdot \nabla \approx 0$ . Соответствующие выражения для безразмерных критериев (числа Рейнольдса, Пекле и т.п.) и оценки из малости легко выписываются. Таким образом, полные производные по времени пренебрежимо малы:  $d / dt = \partial / \partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla \approx 0$ . Кроме этого, предполагается, что влияние вязкого трения жидкости на температурное поле гораздо меньше влияния потоков тепла из-за градиентов температуры:  $2\eta e_{ik} e_{ik} \ll \operatorname{div} \kappa^{(e)} \nabla T^{(e)}$ , где  $\kappa^{(e)}$  — коэффициент теплопроводности жидкости. Наконец, не учитывается искажение температурного поля частицей:  $T = T^0$ .

Основная часть вычислений, необходимых для решения поставленной задачи, производилась с помощью компьютерной программы Maple 7. Поэтому результаты промежуточных вычислений далее не приводятся. Заметим только, что при решении удобно использовать систему вырожденных эллипсоидальных координат вытянутого эллипса вращения.

**3. Схема решения.** Представим неизвестные функции в виде суммы:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^0 + \mathbf{H}', \quad p = p^0 + p', \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}^0 + \mathbf{v}', \quad (5)$$

в которой величины со штрихами есть поправки (возмущения), вызванные наличием частицы. Подставляя (5) в (1), получаем:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^0 + \mathbf{F}' + \rho^{(i)} V \mathbf{g}, \quad \text{где} \quad \mathbf{F}^0 = \oint_S (-p^0 \mathbf{n} + \eta \mathbf{e}_n^0 + \mathbf{T}_n^0) dS, \quad \mathbf{F}' = \oint_S (-p' \mathbf{n} + \eta \mathbf{e}'_n + \mathbf{T}_n - \mathbf{T}_n^0) dS.$$

Уравнения для невозмущённых параметров  $\mathbf{H}^0$ ,  $p^0$ ,  $\mathbf{v}^0$  и возмущений  $\mathbf{H}'$ ,  $p'$ ,  $\mathbf{v}'$  получаются подстановкой (5) в (2)–(4). Из уравнения движения жидкости находим, что  $\mathbf{F}^0$  есть выталкивающая сила:  $\mathbf{F}^0 = -\rho^{(e)} V \mathbf{g}$ . Искать величины  $p'$  и  $\mathbf{v}'$  удобно в виде:

$$p' = p_S + p^H, \quad \mathbf{v}' = \mathbf{v}_S + \mathbf{v}^H, \quad (6)$$

где  $p_S$  и  $\mathbf{v}_S$  — та часть вносимых частицей возмущений, которая не зависит от магнитного поля, а  $p^H$  и  $\mathbf{v}^H$  — часть возмущений, обусловленная наличием магнитного поля. Подставляя (6) в  $\mathbf{F}'$ , находим:

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F}_S + \mathbf{F}^H, \quad \text{где} \quad \mathbf{F}_S = \oint_S (-p_S \mathbf{n} + \eta \mathbf{e}_{S,n}) dS, \quad \mathbf{F}^H = \oint_S (-p^H \mathbf{n} + \eta \mathbf{e}_n^H + \mathbf{T}_n - \mathbf{T}_n^0) dS. \quad (7)$$

Таким образом, полная сила, действующая на частицу, представляется в виде:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_S + \mathbf{F}^H + (\rho^{(i)} - \rho^{(e)}) V \mathbf{g}. \quad (8)$$

Из краевой задачи для  $p_S$  и  $\mathbf{v}_S$  следует, что  $\mathbf{F}_S$  есть гидродинамическая составляющая силы  $\mathbf{F}$ , независящая от магнитного поля. Эта сила хорошо изучена. Например, в случае сферической частицы в однородном потоке жидкости, движущемся с постоянной скоростью,  $\mathbf{F}_S$  равна силе Стокса. Таким образом, в правой части (8) неизвестна только сила  $\mathbf{F}^H$ . Пусть неоднородность поля  $\mathbf{H}^0$  вызвана только неоднородностью температуры. Тогда  $\mathbf{F}^H$  есть термомагнитная сила:  $\mathbf{F}_{tm} = \mathbf{F}^H$ .

**4. Результаты.** Решив уравнения для  $\mathbf{H}^{(e)}$ ,  $p^H$  и  $\mathbf{v}^H$ , после подстановки этих величин в (7), выполнения интегрирования и упрощения, получаем:

$$\mathbf{F}_{\text{tm}} = \frac{V}{4\pi} (d\mu^{(e)}/dT)_0 [f_1(M, \tau) H_0^2 \theta + f_2(M, \tau) (\mathbf{H}_0 \cdot \theta) \mathbf{H}_0]. \quad (9)$$

Нижним индексом 0 отмечены невозмущённые параметры, взятые в точке нахождения частицы. Введено обозначение  $\theta = (\nabla T^0)_0$ . Функции  $f_1$  и  $f_2$  имеют вид:  $f_1 = f_{\text{tm}}^\perp$ ,  $f_2 = f_{\text{tm}}^\parallel - f_{\text{tm}}^\perp$ , где

$$f_{\text{tm}}^\parallel(M, \tau) = \frac{(2Q_2\tau^2 + 3Q_1\tau + 3Q_0)Q_1 M + (3Q_1^2\tau^3 - Q_0Q_1 + 2Q_1\tau - Q_0)M^2}{4(\tau^2 - 1)(Q_1\tau + Q_0)Q_1^2}, \quad (10)$$

$$f_{\text{tm}}^\perp(M, \tau) = \frac{(2Q_2\tau^2 - 9Q_1\tau + 7Q_0)Q_1 M + (3Q_1^2\tau^3 - 4Q_1^2\tau - Q_0Q_1 + 2Q_1\tau - Q_0)M^2}{4(\tau^2 - 1)(Q_1\tau + Q_0)Q_1^2}, \quad (11)$$

$$M = -(\mu_0^{(i)} - \mu_0^{(e)}) / [\mu_0^{(i)} - \mu_0^{(e)} r_1 Q_1'(\tau)], \quad r_1 = \tau/Q_1(\tau), \quad \tau = 1/e,$$

$e$  — эксцентриситет эллипсоида,

$$Q_0(\tau) = \frac{1}{2} \ln \frac{\tau+1}{\tau-1}, \quad Q_1(\tau) = \frac{\tau}{2} \ln \frac{\tau+1}{\tau-1} - 1, \quad Q_2(\tau) = \frac{3\tau^2 - 1}{4} \ln \frac{\tau+1}{\tau-1} - \frac{3}{2}\tau$$

есть сферические функции Лежандра 2-го рода. При вырождении эллипсоида в сферу, соответствующем  $e \rightarrow 0$ , коэффициенты  $f_1(M, \tau)$  и  $f_2(M, \tau)$  переходят в выражения, полученные ранее для сферической частицы [4]. Совпадение с частным случаем свидетельствует в пользу правильности равенств (10)–(11).

Формула (9) позволяет провести анализ зависимости термомагнитной силы от степени вытянутости частицы. Сила  $\mathbf{F}_{\text{tm}}$  является вектором, поэтому полностью характеризуется направлением и величиной. Ради удобства введём более наглядный параметр вытянутости  $s$ , равный отношению длины большей полуоси эллипсоида к длине меньшей:  $s = a/b$  и связанный с  $\tau$  равенством:  $\tau = s/\sqrt{s^2 - 1}$ . Графики, иллюстрирующие зависимость направления термомагнитной силы от  $s$ , приведены на рис. 2–3. Через  $\gamma$  обозначен угол между  $\mathbf{H}_0$  и  $\theta$ , а через  $\sigma$  — угол между векторами  $\mathbf{F}_{\text{tm}}$  и  $\theta$ . Из рисунков видно, изменение  $s$  слабо влияет на направление  $\mathbf{F}_{\text{tm}}$ . Графики зависимостей величины термомагнитной силы от  $s$  при фиксированном объёме частицы изображены на рис. 4–7. Видно, что величина  $F_{\text{tm}}$  сильно растёт с увеличением  $s$  в случае ферромагнитных частиц.

В результате действия термомагнитной силы частица начинает двигаться в жидкости, приобретая некоторую скорость  $\mathbf{u}$ . Поэтому на частицу начинает действовать ещё и сила вязкого трения  $\mathbf{F}_S$ . Направление вытянутости частицы при её движении совпадает с направлением  $\mathbf{H}_0$ . Рассмотрим случай, когда термомагнитная сила параллельна направлению вытянутости частицы, имеющий место при  $\mathbf{H}_0 \parallel \theta$ . Тогда  $\mathbf{F}_{\text{tm}} \parallel \mathbf{u} \parallel \mathbf{F}_S$ , и [5]  $\mathbf{F}_S = -8\pi\eta c \mathbf{u} / (Q_1\tau + Q_0)$ , где  $c = ae$  — фокусное расстояние. Зависимость  $u_{\text{tm}}$  от  $s$  находится из условия равновесия сил:  $F_{\text{tm}} = F_S$ . Аналогично можно рассмотреть случай  $\mathbf{H}_0 \perp \theta$ . Графики,

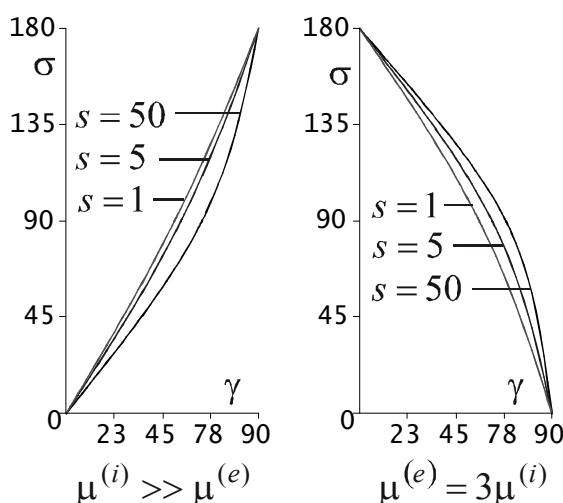


Рис. 2

Рис. 3

демонстрирующие разницу между скоростями термомагнитного переноса вытянутой ( $s > 1$ )

и сферической ( $s=1$ ) частиц с одинаковым объёмом, приведены на рис. 8–9. Видно, для частиц из ферромагнитного материала эта разница может быть очень большой. Таким образом, агрегирование частиц может оказывать сильное влияние на массообмен в магнитных суспензиях.

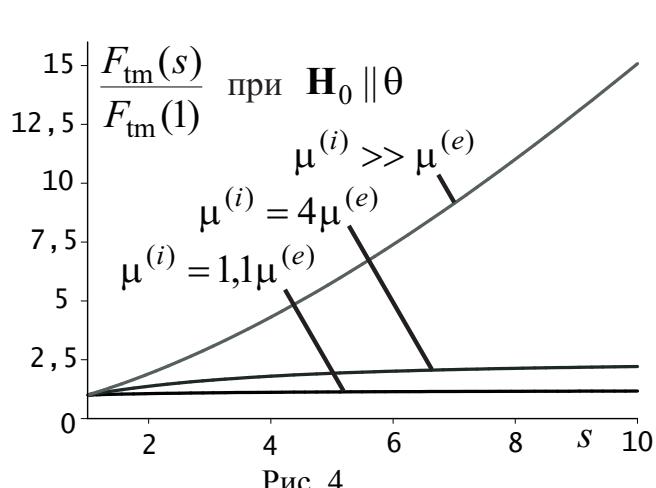


Рис. 4

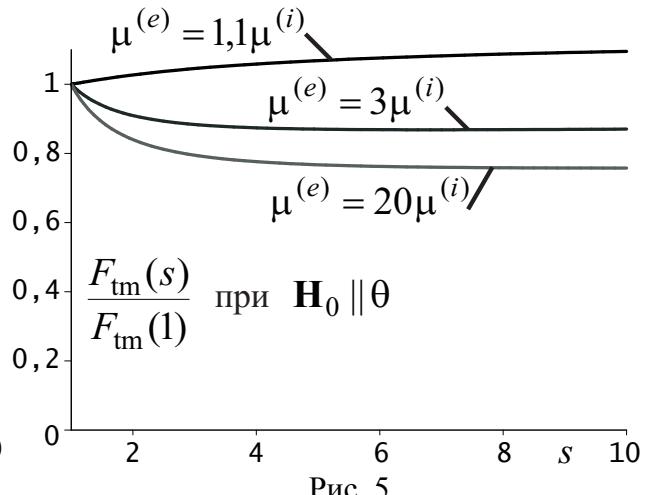


Рис. 5

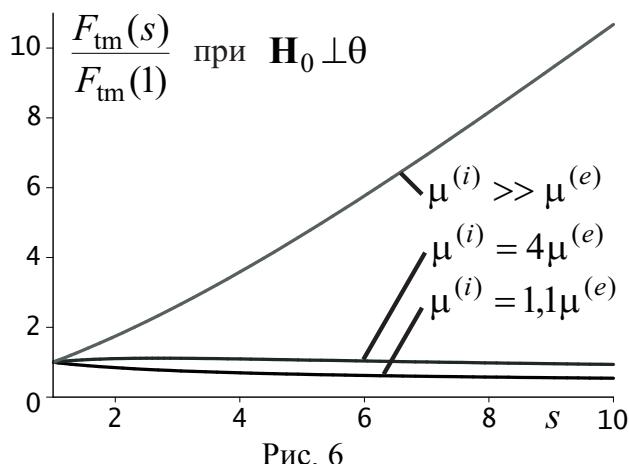


Рис. 6

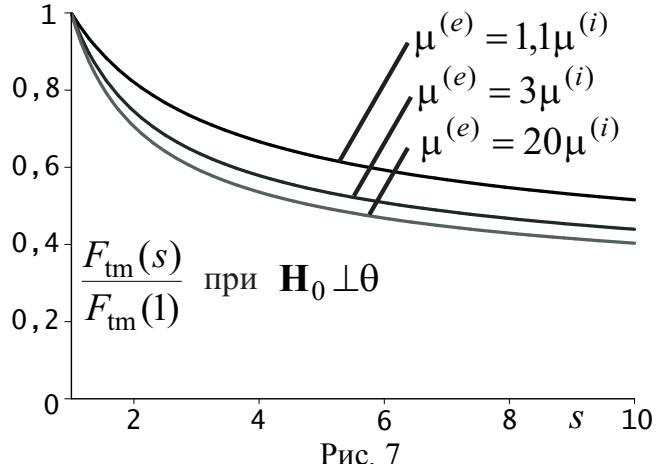


Рис. 7

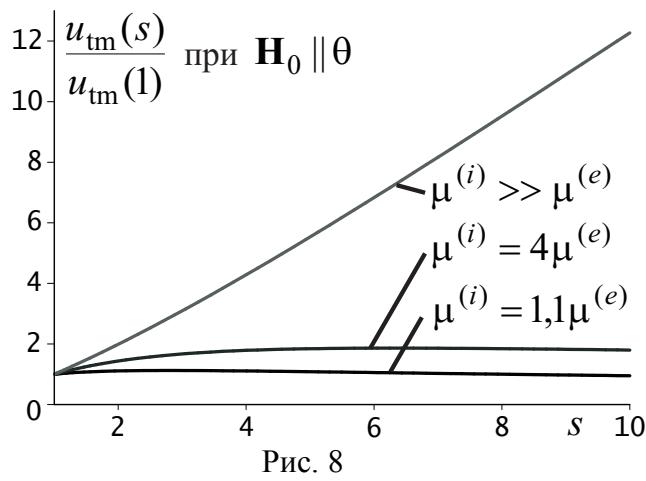


Рис. 8

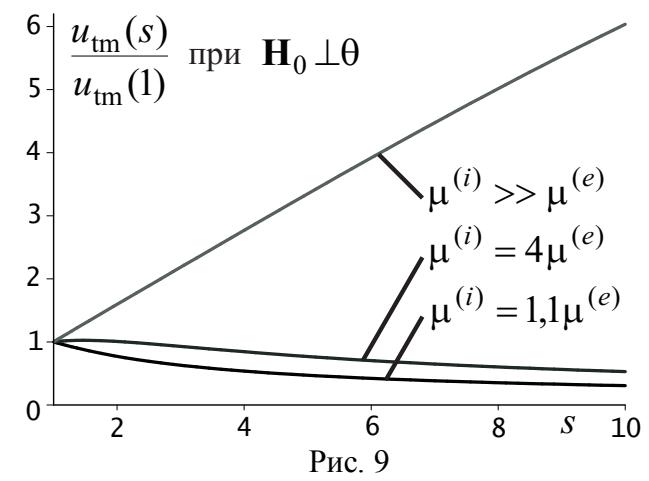


Рис. 9

- 5. Литература.** [1] Э.Я. Блум. Магнитная гидродинамика, 1979, №1, сс.23–27. [2] E. Blums, G. Kronkalns, R. Ozols. Journal of Magnetism and Magnetic Materials, 1983, Vol.39, pp.142–147. [3] M.V. Lukashevich et al. Journal of Magnetism and Magnetic Materials, 1990, Vol.85, pp.216–218. [4] В.А. Налетова, Г.А. Тимонин, И.А. Шкель. Известия АН СССР. Механика жидкости и газа, 1989, том 26, №2, сс.76–83. [5] Дж. Хаппель, Г. Бреннер. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М., "Мир", 1976.