ДИФФУЗИОННАЯ И ДВУХСКОРОСТНАЯ МОДЕЛИ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ МАГНИТНОЙ СУСПЕНЗИИ

А.С. Квитанцев

Введение. В работе применены диффузионный [1] и многоскоростной [2] подходы к исследованию неоднородно нагретой суспензии, взаимодействующей с магнитным полем. Учтены следующие процессы переноса: концентрационная, термо-, магнито-, термомагнитодиффузия, вязкое трение и теплопроводность. Проведено сравнение диффузионной и многоскоростной моделей. Из этого сравнения получены выражения для сил, действующих на фазы со стороны магнитного поля, и выражение для коэффициента диффузии в полидисперсной суспензии с частицами любой формы, находящейся в магнитном поле. Рассмотрен вопрос вычисления феноменологических коэффициентов в частном случае слабоконцентрированной суспензии с вытянутыми вдоль магнитного поля частицами.

§ 1. Диффузионная модель. Рассмотрим двухфазную среду, состоящую из несжимаемой жидкости с магнитной проницаемостью μ_1 и распределённых в этой жидкости твёрдых частиц с магнитной проницаемостью вещества μ_2. Далее везде нижними индексами 1 и 2 обозначаются параметры несущей и взвешенной фаз соответственно. Предположим, что имеется градиент температуры и приложено магнитное поле. Для рассматриваемой среды применимо приближение феррогидродинамики. Пусть электрические токи и токи смещения (которые имеются, если магнитное поле изменяется во времени) пренебрежимо малы. Тогда магнитное поле удовлетворяет следующим уравнениям магнитостатики: $\operatorname{rot}\mathbf{H}=0$, $\operatorname{div}\mathbf{B}=0$, $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$, где $\mathbf{H}$ — вектор магнитного поля, $\mathbf{B}$ — вектор магнитной индукции, μ — магнитная проницаемость смеси. Для вывода уравнений, определяющих гидродинамические параметры среды, такие как поля плотности, скорости, температуры и др., воспользуемся законами сохранения. Будем считать, что отклонения системы от термодинамического равновесия малы, и, следовательно, применима гипотеза локального равновесия.

А. Закон сохранения массы. Состав смеси будем описывать объёмной долей взвешенных частиц φ. Плотность смеси равна: $\rho=(1-\varphi)\rho_1^0+\varphi\rho_2^0$, где ρ_1^0 и ρ_2^0 — «истинные» плотности фаз. «Размазаные» плотности есть $\rho_1=(1-\varphi)\rho_1^0$ и $\rho_1=\varphi\rho_2^0$. Уравнения неразрывности для взвешенной фазы и для смеси в целом имеют вид:

$$\rho\, dc/dt=-\operatorname{div}\mathbf{J}_2,\quad d\rho/dt=-\operatorname{div}\mathbf{v}, \tag{1}$$

где c — массовая доля взвешенной фазы, $\mathbf{J}_2$ — вектор диффузии частиц, $\mathbf{v}$ — скорость смеси, определяемая равенством $\rho\mathbf{v}=\rho_1\mathbf{v}_1+\rho_2\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ — скорости несущей и взвешенной фаз. Эти уравнения полностью описывают перераспределение массы в среде с течением времени.

Б. Закон сохранения импульса. Уравнение движения смеси имеет вид:

$$\rho\, d\mathbf{v}/dt=(\partial P_{ik}/\partial x_k)\mathbf{e}_k+\rho\mathbf{F},\quad \rho\mathbf{F}=\rho_1\mathbf{F}_1+\rho_2\mathbf{F}_2, \tag{2}$$

где P_{ik} — плотность микроскопического потока импульса (тензор напряжений), $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ — объёмные плотности внешних сил, действующих на несущую и взвешенную фазы соответственно. Будем считать, что это консервативные силы неэлектромагнитного происхождения. Силовое воздействие магнитного поля на среду учитывается в тензоре P_{ik}.

В. Закон сохранения энергии. Полная энергия среды и поля e в диффузионном приближении имеет вид: $e=v^2/2+(1-c)\psi_1+c\psi_2+u$, где ψ_1 и ψ_2 — потенциалы сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$, u — внутренняя энергия среды и поля. Тождество Гиббса для функции u примем в виде: $du=T\,dS+H\,dB/4\pi+\xi\,d\varphi$, где T — температура, ξ — химический потенциал смеси. Уравнение для кинетической энергии стандартно получается из уравнения движения, уравнение для потенциальной энергии — из равенств $\mathbf{F}_{1,2} = -\nabla\psi_{1,2}$, $\partial\psi_{1,2}/\partial t = 0$, уравнение для внутренней энергии — из тождества Гиббса. Складывая все эти уравнения, находим:

$$\frac{\partial\rho e}{\partial t} = -\mathrm{div}\,[\rho\mathbf{v}e - \mathrm{P_{ik}v_i}\mathbf{e}_\mathrm{k} + (\psi_2 - \psi_1)\mathbf{J}_2] - P_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + (\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2)\cdot\mathbf{J}_2 + \rho T\frac{ds}{dt} + \frac{H}{4\pi}\frac{dB}{dt} + \rho\xi\frac{dc}{dt}. \quad (3)$$

С другой стороны, энергия замкнутой системы «среда+поле» не имеет источников, и, следовательно, уравнение для её изменения имеет дивергентный вид: $\partial\rho e/\partial t = -\mathrm{div}\,\mathbf{J}_e$, где $\mathbf{J}_e$ — поток энергии. Представим тензор напряжений в виде суммы: $P_{ik} = -p\,\delta_{ik} + \Pi_{ik}^{v} + \Pi_{ik}^{H}$, где p — некоторая скалярная функция, Π_{ik}^{v} — вязкая часть, Π_{ik}^{H} — магнитная часть. Предположим, что вектор потока полной энергии имеет вид:

$$\mathbf{J}_e = \rho e\mathbf{v} + p\mathbf{v} - \Pi_{ik}^{v}v_i\mathbf{e}_k + (\psi_2 - \psi_1)\mathbf{J}_2 + \mathbf{q} + \mathbf{S}, \quad \text{где} \quad \mathbf{S} = (c/4\pi)\mathbf{E}\times\mathbf{H}$$

есть вектор потока электромагнитной энергии, $\mathbf{q}$ — вектор потока тепловой энергии.

Таким образом, из законов сохранения массы и импульса получили систему из пяти уравнений (1)–(2) для нахождения пяти величин: φ, p и $\mathbf{v}$. Однако в эту систему входят потоки массы $\mathbf{J}_2$ и импульса P_{ik}, которые неизвестны. Эти потоки можно определить с точностью до феноменологических коэффициентов из выражения для диссипативной функции σ, которое получается из уравнения для энтропии. Последнее следует из тождества Гиббса и уравнения для полной энергии. При этом появляется поток $\mathbf{q}$, но и он определяется из вида функции σ.

Г. Диссипативная функция и феноменологические уравнения. Сравнивая уравнение (3) с дивергентным видом уравнения сохранения энергии, и допуская, что $\Pi_{ik}^{H} = H_iB_k/4\pi - HB/4\pi$, получаем уравнение для энтропии: $\rho\,ds/dt = -\mathrm{div}\,\mathbf{J}_\mathrm{s} + \sigma/T$, где $\mathbf{J}_s$ — вектор потока энтропии, а σ — диссипативная функция, имеющая вид:

$$\sigma = -\frac{\mathbf{q} - (\tilde{\xi} - T\,\partial\tilde{\xi}/\partial T)\mathbf{J}_2}{T}\cdot\nabla T - \mathbf{J}_2\cdot[(\nabla\tilde{\xi})_T - \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_1] + \Pi_{ik}^{v}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}, \quad \text{где} \quad \tilde{\xi} = \xi - \left(\frac{1}{\rho_1^0} - \frac{1}{\rho_2^0}\right)p. \quad (4)$$

Пусть из числа внешних неэлектромагнитных сил на среду действует только сила тяжести: $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_2 = \mathbf{g}$, $\mathbf{g}$ — ускорение свободного падения. Тогда, учитывая аксиальную симметрию относительно направления магнитного поля, в линейном приближении, из (4) имеем:

$$J_{2i} = -D_{ik}(\nabla_k\tilde{\xi})_T - \frac{D_{ik}^T}{T}\nabla_k T, \quad q_i = -\left[\frac{D_{ik}^T}{T} + D_{ik}\left(\tilde{\xi} - T\frac{\partial\tilde{\xi}}{\partial T}\right)\right](\nabla_k\tilde{\xi})_T - \frac{\kappa_{ik} + D_{ik}^T(\tilde{\xi} - T\,\partial\tilde{\xi}/\partial T)}{T}\nabla_k T,$$

$$D_{ik} = D_1\delta_{ik} + D_2h_ih_k, \quad D_{ik}^T = D_1^T\delta_{ik} + D_2^T h_ih_k, \quad \kappa_{ik} = \kappa_1\delta_{ik} + \kappa_2h_ih_k,$$

где $D_{1,2}$, $D_{1,2}^T$, $\kappa_{1,2}$ — феноменологические коэффициенты, определяемые либо из эксперимента либо из микроскопического рассмотрения, $\mathbf{h} = \mathbf{H}/H$. Выражение для химического потенциала находится из тождества Гиббса. Ради упрощения формул положим намагниченность линейной по полю: $\mu = \mu(\varphi, T)$. С учётом броуновского движения,

$$\xi = \xi_0 - \left(\frac{1}{\rho_1^0} - \frac{1}{\rho_2^0}\right)\frac{\mu H^2}{8\pi} - \frac{\rho}{\rho_1^0\rho_2^0}\left(\frac{\partial\mu}{\partial\varphi}\right)_T\frac{H^2}{8\pi}, \quad \xi_0 = \frac{k}{m}T\left(\ln\frac{\rho_2}{\rho_{20}} + \frac{\rho}{\rho_1^0}\right) + C_1f(T) + C_2,$$

где k — постоянная Больцмана, m — масса одной частицы, $C_{1,2}$ — постоянные числа, а $f(T)$ — определённая функция температуры. Учёт броуновского движения проявляется не только в функции ξ_0, но и во введении поправки $p_p = nkT = (k/m)\rho_2T$ в уравнения:

$$P_{ik} = -(p + p_p)\delta_{ik} + \Pi_{ik}^{v} + \Pi_{ik}^{H}, \quad \tilde{\xi} = \xi - (1/\rho_1^0 - 1/\rho_2^0)(p + p_p).$$

Д. Выражение для вектора диффузии частиц. Уравнение движения смеси. С учётом броуновского движения и явных выражений для функции ξ и тензора Π_{ik}^{H}, имеем:

$$J_{2i} = -D_{ik}\left\{\left(\frac{1}{\rho_1^0}-\frac{1}{\rho_2^0}\right)\nabla_k p - \frac{1}{\rho_2}\nabla_k p_p + \left[2\left(\frac{1}{\rho_1^0}-\frac{1}{\rho_2^0}\right)\left(\frac{\partial\mu}{\partial\varphi}\right)_T + \frac{\rho}{\rho_1^0\rho_2^0}\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial\varphi^2}\right)_T\right]\frac{H^2}{8\pi}\nabla_k\varphi + \right.$$

$$\left. + \left[\left(\frac{1}{\rho_1^0}-\frac{1}{\rho_2^0}\right)\mu + \frac{\rho}{\rho_1^0\rho_2^0}\left(\frac{\partial\mu}{\partial\varphi}\right)_T\right]\nabla_k\frac{H^2}{8\pi}\right\} - \frac{D_{ik}^T - D_{ik}\,k/m}{T}\nabla_k T, \quad (5)$$

$$\rho\, d\mathbf{v}/dt = -\nabla(p+p_p) + (\partial\Pi_{ik}^{v}/\partial x_k)\mathbf{e}_i - H\,\nabla B/4\pi + \rho\,\mathbf{g}. \quad (6)$$

§ 2. Двухскоростная модель. Уравнения движения несущей и взвешенной фаз есть

$$\rho_1\, d_1\mathbf{v}_1/dt = -(1-\varphi)\nabla p + (\partial\Pi_{ik}^{v_1}/\partial x_k)\mathbf{e}_i + \mathbf{F}_{1\text{мп}} + \rho_1\mathbf{g} - \mathbf{F}_{21}, \quad (7)$$

$$\rho_2\, d_2\mathbf{v}_2/dt = -\varphi\nabla p + \nabla p_p + (\partial\Pi_{ik}^{v_2}/\partial x_k)\mathbf{e}_i + \mathbf{F}_{2\text{мп}}^{Hv} + \rho_2\mathbf{g} + \mathbf{F}_{21}, \quad (8)$$

где введены обозначения: $d_{1,2}/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v}_{1,2}\cdot\nabla$, $\Pi_{ik}^{v_{1,2}}$ — вязкие тензора напряжений фаз, $\mathbf{F}_{1,2\text{мп}}$ — объёмные плотности сил, действующих со стороны магнитного поля (мп) на фазы. Верхний индекс Hv у $\mathbf{F}_{2\text{мп}}$ означает, что берётся магнитоскоростная часть силы, т.к. вклад давления неявно уже содержится в слагаемом $-\varphi\nabla p$. Слагаемое $\mathbf{F}_{21}$ учитывает обмен импульсом между фазами. Будем считать, что это объёмная плотность силы сопротивления, действующей со стороны несущей фазы на движущуюся в ней взвешенную фазу. Т.е. $\mathbf{F}_{21} = -n\eta\alpha_{ik}(\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1)_k\mathbf{e}_i$, где n — концентрация частиц, $\eta_{\text{ж}}$ — сдвиговая вязкость несущей жидкости, α_{ik} — тензор второго ранга, зависящий от формы частиц. Например, для сферических частиц радиусом R, при $\varphi \ll 1$, согласно формуле Стокса, $\alpha_{ik} = 6\pi R\delta_{ik}$.

Вообще говоря, силы $\mathbf{F}_{1,2\text{мп}}$ неизвестны, так как выражаются через микроскопические поля. Последние зависят от приложенного поля $\mathbf{H}^a$ и конфигурации и формы частиц, и найти эту зависимость в общем случае затруднительно. Следовательно, чтобы получить выражения для $\mathbf{F}_{1,2\text{мп}}$ через среднее поле $\mathbf{H}$, нужно, во-первых, знать выражения для $\mathbf{F}_{1,2\text{мп}}$ через микроскопические поля, и во-вторых, знать, как связаны приложенное $\mathbf{H}^a$ и среднее $\mathbf{H}$ поля. Таким образом, определить из теории общие выражения для $\mathbf{F}_{1,2\text{мп}}$ не представляется возможным ввиду математических сложностей. Однако это можно сделать путём сравнения с диффузионной моделью. Примем опять диффузионное приближение. Складывая уравнения (7) и (8), получаем уравнение движения смеси:

$$\rho\, d\mathbf{v}/dt = -\nabla p - \nabla p_p + (\partial\Pi_{ik}/\partial x_k)\mathbf{e}_i + \mathbf{F}_{1\text{мп}} + \mathbf{F}_{2\text{мп}}^{Hv} + \rho\,\mathbf{g}. \quad (9)$$

Вычитая уравнение (7), делённое на ρ_1, из уравнения (8), делённого на ρ_2, и учитывая равенство $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = (\rho/\rho_1\rho_2)\mathbf{J}_2$, получаем выражение для вектора диффузии:

$$J_{2i} = \left(\frac{\rho}{\rho_1\rho_2}\right)^2\frac{\alpha_{ik}^{-1}}{n\eta_{\text{ж}}}\left[\left(\frac{1}{\rho_1^0}-\frac{1}{\rho_2^0}\right)\nabla_k p - \frac{1}{\rho_2}\nabla_k p_p - \frac{F_{1\text{мп}\,k}}{\rho_1} + \frac{F_{2\text{мп}\,k}^{Hv}}{\rho_2}\right] \quad (10)$$

§ 3. Сравнение диффузионной и двухскоростной моделей. Представим силы $\mathbf{F}_{1\,\text{мп}}$ и $\mathbf{F}_{2\text{мп}}$ в виде суммы магнитных $\mathbf{F}_{1,2\text{м}}$ и термомагнитных $\mathbf{F}_{1,2\text{тм}}$ составляющих:

$$\mathbf{F}_{1,2\text{мп}} = \mathbf{F}_{1,2\text{м}} + \mathbf{F}_{1,2\text{тм}}, \quad \text{где} \quad \mathbf{F}_{1,2\text{м}} = \mathbf{F}_{1,2\text{мп}}\,|_{\nabla T=0}, \quad \mathbf{F}_{1,2\text{тм}} \sim \nabla T.$$

Из сравнения уравнений (5)–(6) с (9)–(10) находим выражения для сил:

$$\mathbf{F}_{2\text{м}}^{Hv} = -\varphi\left[2\left(\frac{\partial\mu}{\partial\varphi}\right)_T - \varphi\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial\varphi^2}\right)_T\right]\frac{H^2}{8\pi}\nabla\varphi - \varphi\left[\mu - \varphi\left(\frac{\partial\mu}{\partial\varphi}\right)_T\right]\nabla\frac{H^2}{8\pi}, \tag{11}$$

$$\mathbf{F}_{1\text{м}} = -(1-\varphi)\left[2\left(\frac{\partial\mu}{\partial\varphi}\right)_T + \varphi\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial\varphi^2}\right)_T\right]\frac{H^2}{8\pi}\nabla\varphi - (1-\varphi)\left[\mu + \varphi\left(\frac{\partial\mu}{\partial\varphi}\right)_T\right]\nabla\frac{H^2}{8\pi},$$

$$F_{2\text{тм}i}^{Hv} = -\frac{\rho_2}{\rho}\left[\left(\frac{\partial\mu}{\partial T}\right)_\varphi \frac{H^2}{8\pi}\delta_{ik} + \frac{\rho_1}{T}D_{ik}^{TH}\right]\nabla_k T, \quad F_{1\text{тм}i} = -\frac{\rho_1}{\rho}\left[\left(\frac{\partial\mu}{\partial T}\right)_\varphi \frac{H^2}{8\pi}\delta_{ik} - \frac{\rho_1}{T}D_{ik}^{TH}\right]\nabla_k T,$$

где D_{ik}^{TH} — магнитная часть коэффициента термодиффузии. Таким образом, выражения для сил определены, если известны магнитная проницаемость смеси как функция термодинамических параметров и коэффициенты термомагнитной диффузии D_1^{TH} и D_2^{TH}. Кроме этого, из сравнения моделей находится также и выражение для коэффициента диффузии: $D_{ik} = (\rho_1\rho_2/\rho)^2\alpha_{ik}^{-1}/(n\eta_\text{ж})$. Следовательно, часть концентрационной составляющей вектора диффузии частиц, связанная с их броуновским движением, имеет вид:

$$J_{2p} = -(D_{ik}/\rho_2)(\nabla_k p_p)_T \quad (\mathbf{J}_2 = \mathbf{J}_{2p} \quad \text{при} \quad \nabla p = 0, \quad \nabla T = 0, \quad \mathbf{H} = 0).$$

В случае слабоконцентрированной суспензии со сферическими частицами в отсутствие магнитного поля эта формула переходит в известное выражение: $\mathbf{J}_{2p} = -\rho kT/(6\pi\eta_\text{ж}R)\nabla c$.

§ 4. Слабоконцентрированная суспензия с вытянутыми вдоль магнитного поля частицами. В случае малой концентрации, $\varphi << 1$, появляется возможность, решая соответствующие микроскопические задачи, аналитически вычислить функцию $\mu = \mu(\varphi, T, H)$, коэффициенты D_1^{TH} и D_2^{TH}, а также все остальные феноменологические коэффициенты: термо-, магнито-, термомагнитодиффузии, вязкости и теплопроводности. Это обусловлено тем, что соседние частицы расположены относительно далеко друг от друга. Поэтому достаточно вычислить внешние воздействия на *одиночную* частицу, находящуюся в некотором эффективном приложенном поле. Граничные условия на соседних частицах можно не принимать во внимание.

Рассмотрим, в качестве примера, вычисление функции $\mu = \mu(\varphi, T)$. При $\varphi << 1$ имеем: $\mu(T,\varphi) = \mu_1(T) + \alpha(T)\varphi$. Т.к. в суспензиях в магнитном поле происходит агрегирование частиц, нужно учитывать анизотропию формы агрегатов. Последние приближённо можно считать эллипсоидами вращения, вытянутыми вдоль направления локального магнитного поля. Используя известный метод [3], находим функцию $\alpha(T)$ для вытянутых эллипсоидальных частиц:

$$\alpha = \frac{\mu_1}{(\tau^2-1)Q_1(\tau)}\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2-\mu_1\tau Q_1'(\tau)/Q_1(\tau)}, \quad \text{где} \quad Q_1(\tau) = \frac{1}{2}\ln\frac{\tau+1}{\tau-1} - 1, \quad \tau = \frac{1}{e},$$

e — эксцентриситет эллипсоида. При $\varphi << 1$ из (11) имеем: $\mathbf{F}_{2\text{м}} = -\varphi\alpha\nabla H^2/8\pi$. Для сферических частиц [3] $\alpha = 3\mu_1(\mu_2-\mu_1)/(\mu_2+2\mu_1)$. Подставляя это в $\mathbf{F}_{2\text{м}}$ и разделив результат на концентрацию n, получаем известное выражение для магнитной силы, действующей на сферическую частицу. Таким образом, формула (11) является обобщением известного выражения на более общий случай, когда концентрация частиц не мала, её распределение произвольно, а форма частиц любая. Остальные результаты здесь не приводятся из-за отсутствия места.

Литература. [1] С. де Гроот, П. Мазур. Неравновесная термодинамика. М., «Мир», 1964. Перев. с англ. 456 с. [2] А.Н. Крайко, Р.И. Нигматуллин, В.К. Стариков, Л.Е. Стернин. Обзор «Механика многофазных сред» // Итоги науки и техники. Серия «Гидромеханика». Том 6. Механика разреженного газа и многофазных сред. М., ВИНИТИ, 1972, сс.93–174. [3] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. М., «Наука», 1982. 620 с.