

# ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ СИЛА, ДЕЙСТВУЮЩАЯ НА ТЕЛО В ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕЙ И ПОЛЯРИЗУЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

А.С. Квитанцев

*Институт механики МГУ, 119192, Москва, Мичуринский проспект, дом 1*

**Постановка задачи.** Пусть некоторое тело находится внутри сосуда, заполненного однородной несжимаемой жидкостью, причём тело, жидкость и окружающая среда могут обладать свойствами поляризации и электропроводности. Будем считать, что жидкость не имеет свободной границы, то есть граничит только со стенками сосуда; влиянием толщины стенок сосуда пренебрегается. Напряжённости электрического и магнитного приложенных полей обозначим через  $\mathbf{E}^e, \mathbf{H}^e$ , а результирующих полей через  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  соответственно. Задача заключается в вычислении силы, действующей на тело. Если электромагнитная сила в объёме жидкости потенциальна, то электромагнитная составляющая  $\mathbf{F}^{\text{em}}$  полной силы, действующей на тело, может быть найдена независимо от гидродинамической:  $F_i^{\text{em}} = \int_{S_1} (T_{ik} - \phi \delta_{ik}) n_k dS$ . Здесь  $\mathbf{n}$  — вектор внешней нормали к поверхности тела  $S_1$ ,  $T_{ik}$  — электромагнитная часть полного тензора напряжений в жидкости, а  $\phi$  — потенциал объёмной электромагнитной силы,  $\nabla \phi = \partial T_{ik} / \partial x_k \mathbf{e}_i$ . Целью дальнейшего изложения является определение  $\mathbf{F}^{\text{em}}$ . Рассмотрим поставленную задачу в приближении электрогидродинамики.

**Приближение электрогидродинамики.** В случае постоянства диэлектрической проницаемости  $\varepsilon$  в пределах каждой среды ( $\nabla \varepsilon = 0$ ) тензор электромагнитных напряжений и объёмная плотность электромагнитной силы имеют вид:

$$T_{ik} = \varepsilon E_i E_k / 4\pi - E^2 \delta_{ik} / 8\pi, \quad \partial T_{ik} / \partial x_k \mathbf{e}_i = q \mathbf{E} + (\varepsilon - 1) \nabla E^2 / 8\pi,$$

где  $q$  — объёмная плотность свободных зарядов. Пусть электропроводность  $\sigma$  каждой среды постоянна,  $\nabla \sigma = 0$ . Тогда  $q = 0$ , и объёмная сила имеет потенциал  $\phi = (\varepsilon - 1) E^2 / 8\pi$ . Следовательно,  $\mathbf{F}^{\text{em}} = \int_{S_1} \varepsilon (\mathbf{E} E_n / 4\pi - \mathbf{n} E^2 / 8\pi) dS$ . Рас-

пределение электрического поля в приближении ЭГД находится из уравнений:

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0, \quad \text{div } \mathbf{E} = 0 \quad \text{в областях непрерывности,} \quad (1)$$

$$[E_\tau] = 0, \quad [\varepsilon E_n] = 4\pi \Sigma \quad \text{на поверхностях разрыва.} \quad (2)$$

Здесь учтено постоянство  $\varepsilon$ ;  $\Sigma$  — поверхностная плотность свободных зарядов — определяется из уравнения сохранения заряда на границах раздела сред:  $\partial \Sigma / \partial t + [\sigma E_n] = 0$ . В этом уравнении использовано выражение для объёмной плотности тока  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$  (при  $q = 0$ ) и пренебрегается дивергенцией поверхностного тока  $\mathbf{i} = \lambda \mathbf{E}_\tau$  ( $\lambda$  — поверхностная проводимость). Пусть приложенное электрическое поле изменяется по гармоническому закону,  $\mathbf{E}^e = \mathbf{E}_0 \cos \omega t$ . Тогда результирующее поле  $\mathbf{E}$  тоже будет меняться по гармоническому закону,

хотя, возможно, сдвинутому по фазе. Это верно когда заряды на поверхностях разрыва наводятся только из-за существования  $\mathbf{E}^e$ . Поэтому потребуем, чтобы при  $\mathbf{E}^e = 0$  поверхностных зарядов не было. Иначе, наряду с наличием  $\mathbf{E}^e$ , имелись бы ещё какие-то причины возникновения поверхностных зарядов, отличные от процессов электропроводности и поляризации, и в электрических величинах появились бы связанные с этим слагаемые. Воспользуемся комплексной формой записи:  $\mathbf{E} = \text{Re} \tilde{\mathbf{E}}$ ,  $\tilde{\mathbf{E}}^e = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$ . Тогда уравнение для  $\Sigma$  приобретает вид:  $-i\omega \tilde{\Sigma} + [\sigma \tilde{E}_n] = 0$ . Выразив отсюда  $\tilde{\Sigma}$  через  $\tilde{E}_n$  и подставив его во второе граничное условие (2), получаем:  $[(\sigma - i\omega \varepsilon/4\pi) \tilde{E}_n] = 0$ . Введя электрический потенциал  $\varphi$ ,  $\tilde{\mathbf{E}}^e = \nabla \varphi$ , уравнения (1)–(2) перепишем в виде:

$$\Delta \varphi = 0 \quad \text{в областях непрерывности,} \quad (3)$$

$$[\varphi] = 0, \quad [(\sigma - i\omega \varepsilon/4\pi)] \partial \varphi / \partial n = 0 \quad \text{на поверхностях разрыва,} \quad (4)$$

$$\nabla \varphi \rightarrow \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} \quad \text{на бесконечности.} \quad (5)$$

Здесь сделано существенное предположение о том, что потенциалом двойного электрического слоя на поверхностях разрыва можно пренебречь.

Для использования получающихся формул нужно учитывать и время наблюдения  $T$  когда электропроводности сред очень малы. Если время релаксации свободных зарядов  $\varepsilon/\sigma$  намного больше времени наблюдения  $T$ , то даже при  $\omega = 0$  всё определяется только поляризацией сред, и из получающихся формул электропроводности следует исключить. Тогда условие постоянства  $\sigma$  ( $\nabla \sigma = 0$ ) может быть снято, но необходимы новые условия:  $q = 0$ ,  $\Sigma = 0$ .

**Электрическая сила.** Рассмотрим поставленную задачу в простейшей трёхмерной геометрии — когда формы тела и сосуда сферические, а приложенное поле пространственно однородно,  $\mathbf{E}_0 = \text{const}$  (рис. 1). Радиус тела  $R_1$ , радиус сосуда  $R_2$ , диэлектрические проницаемости и электропроводности тела, жидкости, окружающей среды обозначим через  $\varepsilon_b, \varepsilon_f, \varepsilon_s$  и  $\sigma_b, \sigma_f, \sigma_s$  соответственно. Точное решение краевой задачи (3)–(5) представляет значительные математические трудности, поэтому сила находилась в двух приближениях. Решение при малых смещениях тела из центра сосуда  $\mathbf{l}$ ,  $l \ll R_2$ :

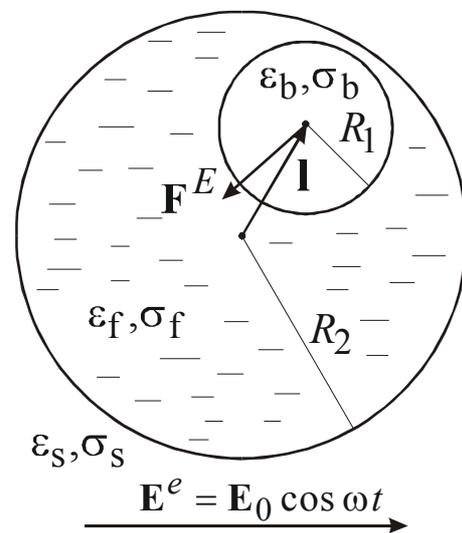


Рис. 1

$$\mathbf{F}^E = -K(t)[\mathbf{I} + (\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{l})\mathbf{E}_0 / (3E_0^2)] + F^E \mathbf{O}(l/R_2), \quad (6)$$

где  $K(t)$  — переменный во времени числовой множитель:

$$K(t) = (\varepsilon_f E_0^2 R_1^6 / R_2^5) \text{Re } A \cdot \text{Re } B, \quad (7)$$

$$A = \frac{z_s(z_f - z_b)e^{-i\omega t}}{3z'}, \quad B = \frac{z_s(z_f - z_b)(z_f - z_s)e^{-i\omega t}}{z'[2z_f + 3z_s - 6(z_f - z_b)(z_f - z_s)/(2z_b + 3z_f)R_1^5/R_2^5]}$$

$$3z' = z_f(z_b + 2z_s) + \frac{2}{3}(z_f - z_b)(z_f - z_s)(1 - R_1^3/R_2^3), \quad z_k \equiv \sigma_k - i\frac{\omega\varepsilon_k}{4\pi} \quad (k = b, f, s).$$

Колебания силы происходят с фазовым сдвигом относительно колебаний приложенного поля. Второе приближённое решение получено для произвольных смещений тела из центра сосуда в случае малого различия между электрическими характеристиками жидкости и окружающей среды:

$$\mathbf{F}^E = C(t) \left\{ \left[ f_1(a) + f_2(a) \frac{(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{l})^2}{E_0^2 l^2} \right] \frac{\mathbf{l}}{l} + f_3(a) \frac{(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{l}) \mathbf{E}_0}{E_0^2 l} \right\} + F^E \mathbf{O} \left( \left| \frac{z_f - z_s}{z_s} \right| \right). \quad (8)$$

Коэффициент  $C(t)$  получается из коэффициента  $K(t)R_2$  в формуле (7), взятого при  $|(z_f - z_s)/z_s| \ll 1$ . Функции  $f_1, f_2, f_3$  отрицательны и возрастают по величине с увеличением  $a \equiv l/R_2$  ( $0 < a < 1$ ), их зависимость от  $a$  в явном виде приведена в [1]. Формула (8) более подробно исследована в [2]. При  $a \rightarrow 0$  решение (8) переходит в (6). Так как  $\mathbf{F}^E = 0$  при  $\mathbf{l} = 0$ , центр сосуда является положением равновесия. Равновесие устойчиво при  $K > 0$ , неустойчиво при  $K < 0$ . Можно показать, что при некоторых условиях, когда сила  $\mathbf{F}^E$  способна уравновешивать силу тяжести, возможна левитация тела в сосуде — состояние равновесия тела без опоры.

#### **Зависимость электрической силы от частоты приложенного поля.**

Направление  $\mathbf{F}^E$  определяется знаком множителя  $K$  в формуле (6), который при произвольном  $\delta \equiv \omega\varepsilon/4\pi\sigma$  зависит от восьми параметров:  $\sigma_b, \varepsilon_b, \sigma_f, \varepsilon_f, \sigma_s, \varepsilon_s, \omega, R_1/R_2$ . Для заданных сред и геометрических размеров электропроводности, диэлектрические проницаемости и отношение  $R_1/R_2$  фиксированы, но частоту  $\omega$  можно менять. При малых частотах,  $\delta \ll 1$ , время релаксации свободных зарядов мало по сравнению с периодом колебаний приложенного поля; следовательно, основную роль в установлении результирующего электрического поля играет электропроводность сред. Тогда знак  $K$ , согласно (7), определяется разностью  $\sigma_f - \sigma_s$ . В области больших частот,  $\delta \gg 1$ , свободные заряды не успевают за изменением приложенного поля, и результирующее поле определяется поляризацией сред. В этом случае знак  $K$  совпадает со знаком разности  $\varepsilon_f - \varepsilon_s$ . Таким образом, если знаки разностей  $\sigma_f - \sigma_s$  и  $\varepsilon_f - \varepsilon_s$  не совпадают, то при малых частотах электрическая сила  $\mathbf{F}^E$  направлена в одну сторону, а при больших — в другую. Отсюда вытекает, что на некоторой частоте  $\omega = \omega_0$  направление силы изменяется на противоположное. Это изменение происходит не скачком, а через обращение силы в нуль:  $\mathbf{F}^E = 0$  при  $\omega = \omega_0$ . Ясно, что изменение направления  $\mathbf{F}^E$  происходит при  $\sigma_f > \sigma_s, \varepsilon_f < \varepsilon_s$  и  $\sigma_f < \sigma_s, \varepsilon_f > \varepsilon_s$ ; не происходит при  $\sigma_f > \sigma_s, \varepsilon_f > \varepsilon_s$  и  $\sigma_f < \sigma_s, \varepsilon_f < \varepsilon_s$ . Заметим, что в формулах (6), (8) электрические характеристики тела  $\sigma_b, \varepsilon_b$  и геометрические пропорции не влияют на то, меняет  $\mathbf{F}^E$  своё направление или нет; они влияют только на значение частоты  $\omega = \omega_0$ ,

при которой происходит смена направления  $\mathbf{F}^E$ . Если тело находится вблизи плоской поверхности, что соответствует  $R_2 \gg R_1$ ,  $l/R_2 \sim 1$ , то, меняя частоту, можно заставить тело либо притягиваться к плоскости, либо отталкиваться от неё. Этот эффект может влиять на поведение электрореологических суспензий. Зависимость среднего по времени  $\overline{K(t)}$  от частоты  $\omega$  для случаев разных соотношений между  $\sigma_f$  и  $\sigma_s$ ,  $\varepsilon_f$  и  $\varepsilon_s$  приведена на рис. 2. При построении этих графиков частотная дисперсия  $\sigma$  и  $\varepsilon$  не учитывалась. Видно, что может существовать максимум величины силы  $F^E$  при некоторой частоте. На всех графиках  $F^E$  стремится к постоянной величине при  $\omega \rightarrow \infty$ . Однако при очень больших частотах могут проявляться зависимости  $\sigma(\omega)$  и  $\varepsilon(\omega)$ . Кроме этого, становится неприменимым приближение ЭГД.

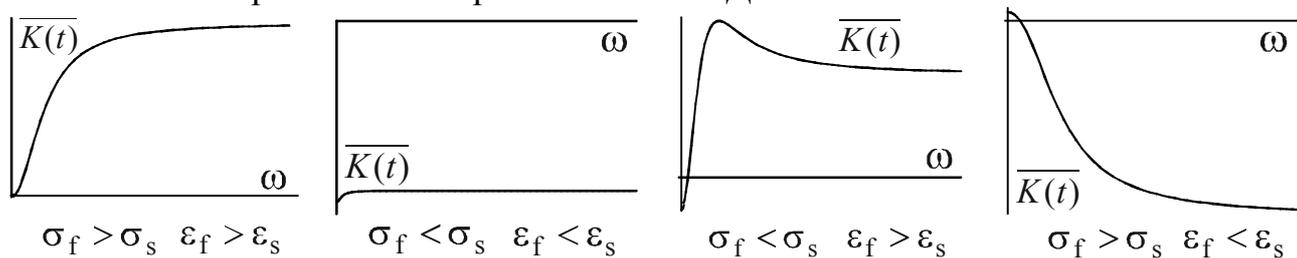


Рис. 2

Зависимость направления электрической силы от частоты приложенного поля имеет место и в общем случае, когда формы тела и стенок сосуда произвольны, а приложенное поле является пространственно неоднородным. Если внешнее электрическое поле меняется во времени по произвольному закону  $\mathbf{E}^e = \mathbf{E}^e(t)$ , то выражение для  $\mathbf{F}^E$  получается через интеграл Фурье:  $\mathbf{F}^E(t) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{F}_\omega^E(t) e^{-i\omega t} d\omega$ , где  $\mathbf{F}_\omega^E(t)$  — амплитуда колебаний силы для частоты  $\omega$ . В работе [3] из численного расчёта следует, что в случае проводящей сферы в проводящей среде около идеально проводящей бесконечной плоскости в постоянном поле, соответствующем  $\sigma_b \ll \sigma_s$ ,  $\sigma_f \ll \sigma_s$ ,  $R_1/R_2 \ll 1$ ,  $l/R_2 \sim 1$ ,  $\omega = 0$  (когда формулы (6) и (8) неприменимы), при  $\sigma_b/\sigma_f < \alpha_{кр}$  шар отталкивается от плоскости, а при  $\sigma_b/\sigma_f > \alpha_{кр}$  — притягивается; величина параметра  $\alpha_{кр} \sim 10^{-2} \div 10^{-4}$  определяется расстоянием от шара до плоскости.

Работа поддержана РФФИ, грант №01-01-00423.

**Литература.** [1] А.С. Квитанцев, В.А. Налетова, В.А. Турков // Изв. РАН, МЖГ, 2002, №3, сс.12–20. [2] В.А. Налетова, В.В. Соколов, В.А. Турков, А.Н. Тятюшкин // Наст. сборник. [3] А.А. Шутов, Н.М. Алонцева, Е.Ю. Астахов // Наст. сборник.