МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

МАТЕРИАЛЫ
МЕЖДУНАРОДНОЙ ШКОЛЫ-СЕМИНАРА
(г. Воронеж, 4-8 июня 2002 г.)

Часть 2

MODERN PROBLEMS OF MECHANICS AND APPLIED MATHEMATICS

PROCEEDINGS OF INTERNATIONAL SCHOOL

(Voronezh, 4-8 June, 2002)

Part 2

Воронеж 2004

УДК 539.2-5

ББК 22.251

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 02-01-1040 г

Материалы международной школы-семинара «Современные проблемы механики и прикладной математики» - Воронеж: Воронежский госуниверситет, 2004.- 242 с.

ISBN 5-9273-0407-9

Сборник содержит материалы международной школы-семинара «Современные проблемы механики и прикладной математики», проведенной в Воронеже 4-8 июня 2002 г. при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

Сборник рассчитан на научных работников, инженеров, аспирантов, студентов старших куров, специализирующихся в области механики деформируемых тел и конструкций.

Статьи публикуются с файлов-оригиналов, представленных авторами в оргкомитет школы- семинара.

ISBN 5-9273-0407-9

УДК 532.31:538.65

МНОГОСКОРОСТНАЯ И ДИФФУЗИОННАЯ МОДЕЛЬ ДИСПЕРСНОЙ НАМАГНИЧИВАЮЩЕЙСЯ СРЕДЫ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ В УРАВНЕНИИ ДЛЯ ВЕКТОРА ДИФФУЗИИ

А.С.Квитанцев, В.А.Налетова

Механико-математический факультет МГУ, Москва,
e-mail: naletova@imec.msu.ru

Выведена феноменологическая модель двухфазной намагничивающейся среды с несжимаемыми фазами, магнитная проницаемость которой зависит от температуры и объемной концентрации диспергированной фазы, в диффузионном приближении и проведено сравнение с многоскоростной моделью такой среды. Показана возможность вычисления феноменологических коэффициентов в уравнении для вектора диффузии диспергированной фазы в диффузионной модели, если вычислены термомагнитная сила, действующая на включения в магнитной жидкости, и известна сила трения, действующая на включения. С использованием выражений для термомагнитной силы, полученных ранее, вычислены феноменологические коэффициенты в уравнении для вектора диффузии.

Введение. Дисперсные намагничивающиеся жидкие среды могут состоять из жидкости носителя (магнитной жидкости или обычной жидкости) и диспергированных в ней различных включений: твердых частиц, капель другой жидкости или пузырей. Вещество, из которых состоят включения, имеет отличные от жидкости-носителя магнитные свойства. В качестве жидкости-носителя может быть магнитная жидкость, которая сама является дисперсной средой, т.к. она есть коллоидный раствор нанометровых ферромагнитных частиц в обычной жидкости. Из-за малости ферромагнитных частиц и их броуновского движения магнитную жидкость можно рассматривать как однородную среду, в которой нет направленного движения частиц относительно жидкости-носителя. При этом размеры включений в магнитной жидкости: частиц, капель и пузырей, должны быть значительно больше размеров ферромагнитных частиц, например, эти включения имеют размеры больше или порядка микрометра. На включения в магнитной жидкости в присутствии магнитного поля могут действовать магнитные силы, связанные с неоднородностью магнитного поля или с неоднородностью магнитной проницаемости магнитной жидкости. Неоднородность магнитной проницаемости магнитной жидкости может быть связана с неоднородностью температуры, т.к. магнитная проницаемость зависит от температуры. Построение диффузионных моделей таких сред проводилось ранее без учета перекрестных эффектов между вектором диффузии и вектором потока тепла [1]. Вычисление коэффициентов в уравнении диффузии проводилось при сравнении диффузионной модели и следствий из многоскоростной модели без учета тепловых эффектов в [2]. Построение модели, учитывающей температурные эффекты и вычисление феноменологических коэффициентов на основе микроскопических теорий, ранее не проводилось.

Ранее авторами этой статьи были получены выражения для термомагнитной силы, действующей на сферическое тело и на эллипсоид вращения, в неоднородно нагретой магнитной жидкости [3], [4].

В этой работе будет выведена феноменологическая модель двухфазной намагничивающейся среды с несжимаемыми фазами, магнитная проницаемость которой зависит от температуры и объемной концентрации диспергированной фазы, в диффузионном приближении и проведено сравнение ее со следствиями из многоскоростной модели такой среды. Показана возможность вычисления феноменологических коэффициентов в уравнении для вектора диффузии диспергированной фазы в диффузионной модели, если вычислены термомагнитная сила, действующая на включения в магнитной жидкости, и если известна сила трения, действующая на включения. С использованием выражений для термомагнитной силы [3], [4] вычислены феноменологические коэффициенты и их комбинации в уравнении для вектора диффузии.

1. Вывод системы уравнений, описывающих движение двухфазной намагничивающейся среды с несжимаемыми фазами в диффузионном приближении. Рассмотрим двухфазную среду, состоящей из несжимаемой жидкости-носителя с магнитной проницаемостью μ_1 и твердых частиц с магнитной проницаемостью вещества μ_2. Далее везде нижние индексы 1, 2 обозначают параметры жидкости и частиц, соответственно. Магнитные проницаемости несжимаемых фаз зависят от температуры T и величины напряженности магнитного поля $\mathbf{H}$.

Введем следующие параметры, описывающие состояние рассматриваемой двухфазной среды: $\rho_1^0 = \mathrm{const}$, $\rho_2^0 = \mathrm{const}$ – истинные плотности веществ 1-ой и 2-ой фазы, φ – объемное содержание диспергированной фазы (2-ой фазы), $1-\varphi$ – объемная концентрация несущей среды (1-ой фазы), $\rho = (1-\varphi)\rho_1^0 + \varphi\rho_2^0$ – плотность смеси, $\rho_1 = (1-\varphi)\rho_1^0$ – "размазанная" плотность несущей среды, $\rho_2 = \varphi\rho_2^0$ – "размазанная" плотность диспергированной фазы, $\mathbf{v}_1$ – скорость несущей среды, $\mathbf{v}_2$ – скорость диспергированной фазы, $\mathbf{v} = \sum \rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha / \rho$ – скорость смеси, $\mathbf{I}_2 = \rho_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v})$ – вектор диффузии 2-ой фазы, $c_\alpha = \rho_\alpha / \rho$ – массовая концентрация α-ой фазы.

Будем рассматривать случай равновесно намагничивающейся среды. Введем понятие внутренней энергии среды и магнитного поля, рассчитанной на единицу массы среды U_m. Будем считать, что для рассматриваемой среды внутренняя энергия U_m зависит от энтропии среды, рассчитанной на единицу массы s_m, от объемной концентрации диспергированной фазы φ, и от магнитной индукции $\mathbf{B}$:

$$U_m = U_m(s_m, \varphi, B)$$

При этом мы неявно предполагаем, что температуры двух фаз и температура броуновского движения диспергированной фазы совпадают с температурой смеси. Тождество Гиббса по предположению имеет вид:

$$dU_m = T ds_m - \frac{p^\varphi}{\rho} d\varphi + \frac{H_k dB_k}{4\pi\rho}$$
$$T = \frac{\partial U_m}{\partial s_m}, \quad p^\varphi = -\rho \frac{\partial U_m}{\partial \varphi}, \quad H_k = 4\pi\rho \frac{\partial U_m}{\partial B_k}. \tag{1}$$

Здесь сделано существенное предположение о том, что производная от внутренней энергии по магнитной индукции равна напряженности магнитного поля. Это предположение позволяет выписать связь внутренней энергии с внутренней энергией в отсутствии магнитного поля и параметрами магнитного поля и магнитными характеристиками среды:

$$U_m = U_{m0} + \int \frac{B_k dB^k}{4\pi\rho\mu(s_m, \varphi, B)}. \tag{2}$$

Это предположение верно в случае равновесной намагниченности, когда $\mathbf{B} = \mu(s_m, \varphi, B)\mathbf{H}$.

Уравнения неразрывности в случае отсутствия обмена массой между фазами имеют вид:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_1 \mathbf{v_1} = 0, \quad \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_2 \mathbf{v}_2 = 0. \tag{3}$$

Для несжимаемых несущей и диспергированной фаз уравнения перепишутся следующим образом:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \varphi \mathbf{v}_2 = 0, \quad \operatorname{div}(\varphi \mathbf{v_1} + (1-\varphi)\mathbf{v_2}) = 0. \tag{4}$$

Уравнения Максвелла в приближении феррогидродинамики имеют вид:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}. \tag{5}$$

Уравнение сохранения импульса среды и поля в отсутствии внешних сил и малости импульса поля записывается следующим образом:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \nabla_i p^{ij} \mathbf{e}_j. \tag{6}$$

Выделим из тензора напряжений некий шаровой тензор:

$$p^{ij} = -p g^{ij} + \tau^{ij}. \tag{7}$$

Теорема живых сил для рассматриваемой среды записывается обычным образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \frac{v^2}{2} = -\operatorname{div} \rho \mathbf{v} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) + p \operatorname{div} \mathbf{v} + v_{\mathrm{i}} \nabla_k \tau^{ik}.$$

Тождество Гиббса с учетом выше сделанных предположений дает следующее выражение:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho U_m = -\mathrm{div}\,\rho\mathbf{v}U_m - p^{\varphi}\frac{d\varphi}{dt} + T\rho\frac{ds_m}{dt} + \frac{H}{4\pi}\frac{dB}{dt} +$$
$$+\,\mathrm{div}\left(\mathbf{q} - v_i\Pi^{ik}\mathbf{e}_k\right) - \mathrm{div}\left(\mathbf{q} - v_i\Pi^{ik}\mathbf{e}_k\right).$$

Здесь добавлено и вычтено слагаемое $\mathrm{div}\left(\mathbf{q} - v_i\Pi^{ik}\mathbf{e}_k\right)$, которое вводится для учета теплопроводности среды и вязкости, и входящие в это слагаемое новые обозначения впоследствии будут определены при построении модели. С учетом теоремы живых сил и следствия тождества Гиббса получим следующее равенство:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\frac{v^2}{2} + U_m\right)\right] = -\mathrm{div}\left[\rho\mathbf{v}\left(\frac{v^2}{2} + U_m + \frac{p}{\rho}\right) + \mathbf{q} - v_i\Pi^{ik}\mathbf{e}_k + \mathbf{S}\right] +$$
$$v_i\nabla_k\left(\tau^{ik} - \frac{H^iB^k}{4\pi} + \frac{\mathbf{HB}}{4\pi}g^{ik} - \Pi^{ik}\right) + \qquad (8)$$
$$+\,p\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} - p^{\varphi}\frac{d\varphi}{dt} + T\rho\frac{ds_m}{dt} + \mathrm{div}\,\mathbf{q} - \Pi_{ik}\nabla^i v^k.$$

Здесь использовано следствие полных уравнений Максвелла, связывающее вектор Пойтинга $\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{H}$ и производную от магнитной индукции:

$$\frac{\mathbf{H}}{4\pi}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = -\mathrm{div}\mathbf{S}.$$

Сделаем далее ряд существенных предположений:

1) $\tau^{ik} = \dfrac{H^iB^k}{4\pi} - \dfrac{\mathbf{HB}}{4\pi}g^{ik} + \Pi^{ik};$ (9)

2) $\dfrac{\partial E}{\partial t} = -\mathrm{div}\mathbf{Q}_E,$ (10)

$$\mathbf{Q}_E = \rho\mathbf{v}\left(\frac{v^2}{2} + U_m + \frac{p}{\rho}\right) + \mathbf{q} - v_i\Pi^{ik}\mathbf{e}_k + \mathbf{S}, \quad E = \rho\left(\frac{v^2}{2} + U_m\right).$$

Тогда с учетом сделанных предположений (9) и (10) из уравнения (8) следует уравнение для энтропии:

$$T\rho\frac{ds_m}{dt} + \mathrm{div}\,\mathbf{q} + p\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} - p^{\varphi}\frac{d\varphi}{dt} + \Pi_{ik}\nabla^i v^k = 0. \qquad (11)$$

Преобразуем слагаемые $(p/T)\mathrm{div}\,\mathbf{v}$, $-\left(p^{\varphi}/T\right)d\varphi/dt$:

$$\frac{p}{T}\operatorname{div}\mathbf{v} = -\operatorname{div}\frac{\mathbf{I}_2}{T}\left(\frac{p}{\rho_2^0} - \frac{p}{\rho_1^0}\right) + \mathbf{I}_2\nabla\left(\frac{p}{\rho_2^0} - \frac{p}{\rho_1^0}\right)\frac{1}{T},$$

$$-\frac{p^{\varphi}}{T}\frac{d\varphi}{dt} = -\operatorname{div}\frac{\mathbf{I}_2}{T}\frac{p^{\varphi}}{\rho_2^0} - \mathbf{I}_2\nabla\left(\frac{p^{\varphi}}{\rho_2^0}\frac{1}{T}\right) + \frac{\varphi p^{\varphi}}{T}\nabla_i v^i.$$

С учетом последних двух формул уравнение для энтропии можно переписать в виде

$$\frac{\partial \rho s_m}{\partial t} = -\operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{q}}{T} + \rho\mathbf{v}s_m\right) - \frac{\mathbf{q}\nabla T}{T^2} + \frac{\Pi_{ik}}{T}\nabla^i v^k + \operatorname{div}\frac{\mathbf{I}_2}{T}\left(\frac{p}{\rho_2^0} - \frac{p}{\rho_1^0}\right) -$$

$$-\mathbf{I}_2\nabla\left(\frac{p}{\rho_2^0} - \frac{p}{\rho_1^0}\right)\frac{1}{T} - \operatorname{div}\frac{\mathbf{I}_2}{T}\frac{p^{\varphi}}{\rho_2^0} + \mathbf{I}_2\nabla\left(\frac{p^{\varphi}}{\rho_2^0}\frac{1}{T}\right) - \frac{\varphi p^{\varphi}}{T}\nabla_i v^i.$$

Окончательно уравнение для энтропии можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial \rho s_m}{\partial t} = -\operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{q}}{T} + \rho\mathbf{v}s_m + \mathbf{I}_2 l\right) + \sigma, \tag{12}$$

$$\sigma = -\frac{\mathbf{q}\nabla T}{T^2} + \left(\Pi_{ik} - \varphi p^{\varphi} g_{ik}\right)\frac{\nabla^i v^k}{T} + \mathbf{I}_2\boldsymbol{\zeta},$$

$$l = \frac{p^{\varphi}}{T\rho_2^0} + \frac{p}{T}\left(\frac{1}{\rho_1^0} - \frac{1}{\rho_2^0}\right). \quad \boldsymbol{\zeta} = \nabla\frac{p^{\varphi}}{T\rho_2^0} + \left(\frac{1}{\rho_1^0} - \frac{1}{\rho_2^0}\right)\nabla\frac{p}{T}.$$

Используя соотношения и принцип Онзагера, можно получить замыкающие систему уравнений соотношения

$$I_{2i} = L_{ij}\zeta^j + N_{ij}\nabla^j T, \tag{13}$$

$$\frac{q_i}{T^2} = K_{ij}\nabla^j T + M_{ij}\zeta^j, \quad M_{ij} = N_{ij} \tag{14}$$

$$\Pi_{ik} = \varphi p^{\varphi} g_{ik} + L_{ikjl}\nabla^j v^l / T. \tag{15}$$

Здесь K_{ij} L_{ij} N_{ij} M_{ij} L_{ikjl} — онзагеровские коэффициенты, которые в данной теории считаются известными функциями термодинамических параметров и структуры смеси, определяемыми либо из эксперимента, либо из каких-либо микроскопических теорий. Данный феноменологический вывод уравнений не позволяет вывести выражения для этих онзагеровских коэффициентов. В изотропной среде при наличии магнитного поля можно считать:

$$L_{ij} = L_1 g_{ij} + L_2 H_i H_j, \quad N_{ij} = N_1 g_{ij} + N_2 H_i H_j.$$

В случае анизотропии среды, например, если включения имеют вытянутую форму (эллипсоиды вращения) и направление их длинной оси $\mathbf{d}$ совпадает с направлением магнитного поля $\mathbf{d} \| \mathbf{H}$, то выражения для L_{ij}, N_{ij} имеют тот же вид.

Таким образом, мы получили замкнутую с точностью до коэффициентов Онзагера систему уравнений, которая описывает смесь двух несжимаемых фаз, намагничивающихся по разным законам. Эта система уравнений состоит из уравнений Максвелла (5), двух уравнений неразрывности (4), тождества Гиббса (1), в котором заложены уравнения состояния, уравнения движения для смеси (6), выражения для тензора напряжений смеси (7), (9), выражения для внутренней энергии смеси и магнитного поля (2), уравнение энергии для смеси (10), соотношений, вытекающих из второго закона термодинамики, и описывающих диссипативные процессы теплопроводности (14), диффузии (направленного относительного движения) диспергированной фазы относительно жидкости-носителя (13) и вязкости (15).

Однако возникает трудность с явным видом выражения для внутренней энергии среды и поля, т.к. необходимо знать выражение магнитной проницаемости смеси как функции энтропии, объемной концентрации диспергированной фазы и магнитной индукции. Обычно из эксперимента или теории магнитная проницаемость известна как функция температуры, объемной концентрации диспергированной фазы и напряженности магнитного поля.

Например, в [5] выведена формула для магнитной или диэлектрической проницаемости смеси сферических частиц при малых φ ($\varphi \ll 1$), это может быть примером зависимости μ от φ и T:

$$\mu = \mu_1(T) + \varphi \frac{\partial \mu}{\partial \varphi}(T), \qquad \frac{\partial \mu}{\partial \varphi}(T) = -3\mu_1 \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2 + 2\mu_1}. \tag{16}$$

Эта формула верна для случая малых полей, когда $\mu_1 = \mu_1(T)$, $\mu_2 = \mu_2(T)$.

Для того, чтобы воспользоваться знанием магнитной проницаемости как функции температуры и концентрации диспегированной фазы, сделаем переход к другому термодинамическому потенциалу, зависящему от температуры, объемной концентрации диспергированной фазы и напряженности магнитного поля.

Рассмотрим частный случай, когда магнитная проницаемость смеси зависит только от объемной концентрации диспергированной фазы φ и температуры T, $\mu = \mu(\varphi, T)$, и эта зависимость от φ линейна

$$\mu = \mu_1(T) + \frac{\partial \mu}{\partial \varphi}\varphi, \qquad \frac{\partial \mu}{\partial \varphi} = \frac{\partial \mu}{\partial \varphi}(T) = \alpha. \tag{17}$$

Чтобы перейти к новым переменным H , T , введем новый термодинамический потенциал $\widetilde{F}_m$

$$\widetilde{F}_m = F_m - \frac{HB}{4\pi\rho}, \; F_m = U_m - Ts_m. \tag{18}$$

Тождество Гиббса для термодинамического потенциала $\widetilde{F}_m$ имеет вид:

$$\begin{aligned} d\widetilde{F}_m &= -s_m dT - \frac{p^\varphi}{\rho} d\varphi - \frac{B_k}{4\pi} d\left(\frac{H^k}{\rho}\right) = \\ &= -s_m dT + \left(-\frac{p^\varphi}{\rho} + \frac{\rho_2^0 - \rho_1^0}{\rho^2}\frac{HB}{4\pi}\right) d\varphi - \frac{B_k dH^k}{4\pi\rho}. \end{aligned} \tag{19}$$

Нетрудно видеть, что из тождества Гиббса следует

$$\widetilde{F}_m = \widetilde{F}_0 - \int \frac{B_k dH^k}{4\pi\rho}. \tag{20}$$

Нижним индексом 0 здесь и далее будут обозначаться термодинамические функции в отсутствии магнитного поля. Из тождества Гиббса (19) и выражения для потенциала $\widetilde{F}_m$ (20) с учетом (17) следуют выражения для p^φ и $-\varphi p^\varphi$

$$p^\varphi = p_0^\varphi + \frac{\partial\mu}{\partial\varphi}\frac{H^2}{8\pi} + \frac{\rho_2^0 - \rho_1^0}{\rho^2}\frac{HB}{8\pi},$$

$$-\varphi p^\varphi = -\varphi p_0^\varphi - \varphi\frac{\partial\mu}{\partial\varphi}\frac{H^2}{8\pi} - \frac{\varphi\left(\rho_2^0 - \rho_1^0\right)}{\rho^2}\frac{HB}{8\pi}.$$

Значение p_0^φ вычисляется по формуле:

$$p_0^\varphi = -\rho\left(\frac{\partial F_0}{\partial\varphi}\right)_T, \qquad F_0 = c_1 F_{01}(T) + c_2 F_{02}(T) + c_2 F_{02p}(T,\varphi).$$

Здесь $F_{02p}(T,\varphi)$ — свободная энергия броуновского движения, рассчитанная на единицу массы частиц. Чтобы вычислить $F_{02p}(T,\varphi)$ сделаем предположение о том, что частицы в броуновском движении описываются как совершенный газ. При этом верны равенства (n , m — масса частицы, число частиц в единице объема):

$$F_{02p} = U_{02p} - Ts_{02p}, \qquad U_{02p} = \frac{3}{2}\frac{nkT}{\rho_2} = \frac{3}{2}\frac{kT}{m},$$

$$s_{02p} = \frac{3k}{2m}\ln\frac{T}{T_0} - \frac{k}{m}\ln\frac{\rho_2}{\rho_{20}} + s_{02p}^0, \qquad s_{02p}^0 = s_{02p}^0\left(T_0, \rho_{20}\right),$$

$$p_p = nkT = \frac{mnkT}{m} = \frac{\rho_2 kT}{m}.$$

Свободная энергия броуновского движения равна:

$$F_{02p} = \frac{3kT}{2m} - \frac{3kT}{2m}\ln\frac{T}{T_0} + \frac{kT}{m}\ln\frac{\rho_2}{\rho_{20}} + s^0_{02p}T = F'_{02p}(T) + \frac{kT}{m}\ln\frac{\rho_2}{\rho_{20}}.$$

Используя полученный результат, вычислим p_0^{φ}:

$$p_0^{\varphi} = -\frac{\rho\rho_2^0\rho_1^0}{\rho^2} f(T) + \frac{(-\rho)\rho_2^0\rho_1^0}{\rho^2}\frac{kT}{m}\ln\frac{\rho_2}{\rho_{20}} - \frac{\rho_2 kT}{m}\frac{1}{\varphi},$$

$$f(T) = -F_{01}(T) + F_{02}(T) + F'_{02p} = T\left(-c_{V1} + c_{V2} + \frac{3k}{2m}\right)(1 - \ln T).$$

Используя полученные выше выражения для p_0^{φ}, выпишем окончательные выражения для $-\varphi p^{\varphi}$ и p^{φ}/ρ_2^0

$$-\varphi p^{\varphi} = \frac{\rho_2^0\rho_1^0\varphi}{\rho} f(T) + \frac{\rho_2^0\rho_1^0\varphi}{\rho}\frac{kT}{m}\ln\frac{\rho_2}{\rho_{20}} + p_p - \varphi\frac{\partial\mu}{\partial\varphi}\frac{H^2}{8\pi} - \frac{\varphi(\rho_2^0 - \rho_1^0)}{\rho}\frac{HB}{8\pi},$$

$$\frac{p^{\varphi}}{\rho_2^0} = -\frac{\rho_1^0}{\rho} f(T) - \frac{\rho_1^0}{\rho}\frac{kT}{m}\ln\frac{\rho_2}{\rho_{20}} - \frac{p_p}{\rho_2} + \frac{\partial\mu}{\partial\varphi}\frac{H^2}{8\pi}\frac{1}{\rho_2^0} - \frac{\rho_2^0 - \rho_1^0}{\rho}\frac{HB}{8\pi}\frac{1}{\rho_2^0}$$

В уравнение движения для смеси (6) входит слагаемое $p - \varphi p^{\varphi}$, которое можно записать следующим образом:

$$p - \varphi p^{\varphi} = p^* + p_p - \varphi\frac{\partial\mu}{\partial\varphi}\frac{H^2}{8\pi} - \frac{\varphi(\rho_2^0 - \rho_1^0)}{\rho}\frac{HB}{8\pi} - \frac{\rho_1^0}{\rho}\frac{HB}{8\pi},$$

$$p^* = p + \frac{\rho_2^0\rho_1^0\varphi}{\rho} f(T) + \frac{\rho_2^0\rho_1^0\varphi}{\rho^2}\frac{kT}{m}\ln\frac{\rho_2}{\rho_{20}} + \frac{\rho_1^0}{\rho}\frac{HB}{8\pi} = p + p_x.$$

Вычислим $\boldsymbol{\zeta}$, которое по определению равно

$$\boldsymbol{\zeta} = \nabla\frac{p^{\varphi}}{T\rho_2^0} + \frac{\rho_2^0 - \rho_1^0}{\rho_1^0\rho_2^0}\nabla\frac{p^* - p_x}{T}.$$

С учетом выражений для p^{φ}/ρ_2^0, p^* и p_x получим явное выражение для $\boldsymbol{\zeta}$:

$$\boldsymbol{\zeta} = -\nabla\frac{f(T)}{T} - \frac{k}{\rho_2}\nabla n + \frac{\rho_2^0 - \rho_1^0}{\rho_1^0\rho_2^0}\nabla\frac{p^*}{T} + \nabla\frac{1}{T\rho_2^0}\frac{\partial\mu}{\partial\varphi}\frac{H^2}{8\pi}.$$

Используя (17), (6) и формулу для $p - \varphi p^{\varphi}$, выпишем уравнения движения для смеси (без учета вязкости)

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}=-\nabla\left(p^*+p_p\right)+\varphi\frac{\partial\mu}{\partial\varphi}\nabla\frac{H^2}{8\pi}-\frac{H^2}{8\pi}\nabla\mu_1 .$$

Можно показать, что верно равенство:

$$\nabla\frac{f(T)}{T}=-\left(-c_{V1}+c_{V2}+\frac{3k}{2m}\right)\nabla T .$$

В итоге получим уравнение движения и выражение для вектора диффузии в следующем виде

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}=-\nabla p^*-\nabla p_p+\varphi\frac{\partial\mu}{\partial\varphi}\nabla\frac{H^2}{8\pi}-\frac{H^2}{8\pi}\nabla\mu_1 , \qquad (21)$$

$$I_{2i}=\frac{L_1 g_{ij}+L_2 H_i H_j}{T}\left\{-\frac{1}{\rho_2}\nabla^j p_p+\frac{\rho_2^0-\rho_1^0}{\rho_2^0\rho_1^0}\nabla^j p^*+\frac{\alpha}{\rho_2^0}\nabla^j\frac{H^2}{8\pi}+\right.$$

$$+\left(-c_{V1}+c_{V2}+\frac{5k}{2m}\right)\nabla^j T-\frac{\rho_2^0-\rho_1^0}{\rho_2^0\rho_1^0}p^*\frac{1}{T}\nabla^j T+ \qquad (22)$$

$$\left.+\left(-\frac{1}{T\rho_2^0}\alpha+\frac{1}{\rho_2^0}\frac{\partial\alpha}{\partial T}\right)\frac{H^2}{8\pi}\nabla^j T\right\}+\left(N_1 g_{ij}+N_2 H_i H_j\right)\nabla^j T.$$

2. Двухскоростная модель дисперсной среды в случае, когда магнитная проницаемость смеси зависит от температуры и объемной концентрации диспергированной фазы. Рассмотрим вывод многоскоростной модели в случае двухфазной смеси, когда магнитная проницаемость смеси зависит от температуры и объемной концентрации диспергированной фазы. Температуры фаз предполагаются одинаковыми. Объемная концентрация диспергированной фазы мала. При этом можно считать, что магнитная проницаемость смеси линейно зависит от объемной концентрации диспергированной фазы:

$$\mu=\mu_1(T)+\varphi\frac{\partial\mu}{\partial\varphi}(T)$$

Будем рассматривать случай малых чисел Пекле, когда теплопроводность смеси достаточно большая и температура смеси удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta T=0 .$$

Данный случай нас интересует, т.к. в этом случае в [3], [4] вычислена термомагнитная сила взаимодействия между включением и несущей средой, связанная с неоднородностью температуры.

Уравнения неразрывности и уравнения движения в многоскоростном приближении имеют вид:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\operatorname{div}\varphi\mathbf{v}_2=0, \qquad \operatorname{div}(\varphi\mathbf{v}_1+(1-\varphi)\mathbf{v}_2)=0, \tag{23}$$

$$\rho_1\frac{d_1\mathbf{v}_1}{dt}=-\nabla p_1+c_1\nabla_k\tau^{ik}\mathbf{e}_i-\mathbf{f}_{12}+\mathbf{F}_{1m}+\rho_1\mathbf{g}, \tag{24}$$

$$\rho_2\frac{d_2\mathbf{v}_2}{dt}=-\nabla p_p+c_2\nabla_k\tau^{ik}\mathbf{e}_i+\mathbf{f}_{21}+\mathbf{F}_{2m}+\rho_2\mathbf{g}. \tag{25}$$

Здесь индексом 1 и 2 обозначены параметры, относящиеся к несущей жидкости и к твердым частицам, соответственно, τ_{ij} — тензор вязких напряжений в жидкости, p_p — давление частиц, связанное с броуновским движением, $\mathbf{f}_{12}$ — сила, действующая на частицы со стороны жидкости, $\mathbf{F}_{1m}$, $\mathbf{F}_{2m}$ — силы, действующие на несущую жидкость и на частицы со стороны магнитного поля.

Мы будем рассматривать движение смеси, в которой сила взаимодействия между фазами $\mathbf{f}_{12}$ и сила Стокса равны:

$$\mathbf{f}_{12}=-\varphi\nabla p_1+\mathbf{F}_S+\mathbf{F}_{TM}, \quad F_S^i=-L_S^{ij}\left(v_{2j}-v_{1j}\right).$$

Рассмотрим сумму левых частей уравнений движения (24), (25):

$$\rho_1\frac{d_1\mathbf{v}_1}{dt}+\rho_2\frac{d_2\mathbf{v}_2}{dt}=\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}+\nabla_k u_{ik}\mathbf{e}_i, \qquad u_{ik}=\frac{\rho_1\rho_2}{\rho}(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)_i(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)_k.$$

Если $\rho_1\rho_2(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)_i(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)_k \ll \rho^2 v_i v_k$ или $\rho_1\rho_2(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)^2 \ll \rho^2 v^2$, то

$$\rho_1\frac{d_1\mathbf{v}_1}{dt}+\rho_2\frac{d_2\mathbf{v}_2}{dt}\approx\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

Из суммы уравнений движения для двух фаз следует уравнение движения для смеси, которое в пренебрежении слагаемых, пропорциональных квадрату разницы скоростей фаз, имеет вид:

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}=-\nabla(p_1+p_p)+\nabla_k\tau^{ik}\mathbf{e}_i+\mathbf{F}_{1m}+\mathbf{F}_{2m}+\rho\mathbf{g}. \tag{26}$$

Рассмотрим разницу уравнений движения фаз, поделенных на соответствующую плотность:

$$\frac{d_1\mathbf{v}_1}{dt}-\frac{d_2\mathbf{v}_2}{dt}=-\frac{1}{\rho_1}\nabla p_1+\frac{1}{\rho_2}\nabla p_p-\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}\right)\mathbf{f}_{12}+\frac{\mathbf{F}_{1m}}{\rho_1}-\frac{\mathbf{F}_{2m}}{\rho_2}.$$

Если $\dfrac{d_1\mathbf{v}_1}{dt}-\dfrac{d_2\mathbf{v}_2}{dt}\approx 0$, то можно получить выражение для силы взаимодействия $\mathbf{f}_{12}$:

$$\mathbf{f}_{12} = \frac{\rho_1\rho_2}{\rho}\left(-\frac{1}{\rho_1}\nabla p_1 + \frac{1}{\rho_2}\nabla p_p + \frac{\mathbf{F}_{1m}}{\rho_1} - \frac{\mathbf{F}_{2m}}{\rho_2}\right). \qquad (27)$$

Из этого равенства нетрудно получить выражение для силы Стокса:

$$\mathbf{F}_S = \mathbf{f}_{12} + \varphi\nabla p_1 - \mathbf{F}_{TM} =$$

$$= \frac{\rho_1\rho_2}{\rho}\left(-\frac{\rho_2^0 - \rho_1^0}{\rho_1^0\rho_2^0}\nabla p_1 + \frac{1}{\rho_2}\nabla p_p - \frac{\rho}{\rho_1\rho_2}\mathbf{F}_{TM} + \frac{\mathbf{F}_{1m}}{\rho_1} - \frac{\mathbf{F}_{2m}}{\rho_2}\right).$$

Используем тождества: $\mathbf{I}_2 = \rho_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}) = \frac{\rho_1\rho_2}{\rho}(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)$, и получим равенство:

$$I_{2i} = -L_{Sij}^{-1}\frac{\rho_1\rho_2}{\rho}F_S^j.$$

Из выражения для силы Стокса и соотношения между силой Стокса и вектором диффузии следует выражение для вектора диффузии:

$$I_{2i} = L_{Sij}^{-1}\left(\frac{\rho_1\rho_2}{\rho}\right)^2\left(-\frac{\rho_2^0 - \rho_1^0}{\rho_1^0\rho_2^0}\nabla^j p_1 + \frac{1}{\rho_2}\nabla^j p_p - \frac{\rho}{\rho_1\rho_2}\mathbf{F}_{TMi} + \frac{\mathbf{F}_{1mi}}{\rho_1} - \frac{\mathbf{F}_{2mi}}{\rho_2}\right).$$

3. Вычисление феноменологических коэффициентов в диффузионной модели. Уравнение движения для смеси и выражение для вектора диффузии в диффузионной модели имеют вид:

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla\left(\tilde{p} + p_p\right) - \frac{d\mu_1}{dT}\frac{H^2}{8\pi}\nabla T + \alpha\varphi\nabla\frac{H^2}{8\pi} + \nabla_k\tau^{ik}\mathbf{e}_i. \qquad (28)$$

$$I_{2i} = \frac{L_1 g_{ij} + L_2 H_i H_j}{T}\left\{\frac{\rho_2^0 - \rho_1^0}{\rho_1^0\rho_2^0}\nabla^j\tilde{p} - \frac{1}{\rho_2}\nabla^j p_p + \frac{\alpha}{\rho_2^0}\nabla^j\frac{H^2}{8\pi} + \right.$$

$$\left. + \left[c_{V2} - c_{V1} + \frac{5k}{2m} - \frac{\rho_2^0 - \rho_1^0}{\rho_2^0\rho_1^0}\frac{\tilde{p}}{T} + \frac{1}{\rho_2^0}\left(\frac{d\alpha}{dT} - \frac{\alpha}{T}\right)\frac{H^2}{8\pi}\right]\nabla^j T\right\} +$$

$$+ \left(N_1 g_{ij} + N_2 H_i H_j\right)\nabla^j T.$$

Выражения для коэффициентов L_1, L_2, N_1, N_2 не известны. Вычислить эти коэффициенты можно из сравнения этих уравнений с аналогичными уравнениями, полученными из многоскоростной модели, учитывающей выражение для термомагнитной силы.

Уравнение движения для смеси и выражение для вектора диффузии, полученные из многоскоростной модели, учитывающей выражение для термомагнитной силы, имеют вид:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla\left(p_1 + p_p\right) + \nabla_k \tau^{ik} \mathbf{e}_i + \mathbf{F}_{1m} + \mathbf{F}_{2m} + \rho \mathbf{g}, \tag{29}$$

$$I_{2i} = L_{Sij}^{-1} \left(\frac{\rho_1 \rho_2}{\rho} \right)^2 \left(-\frac{\rho_2^0 - \rho_1^0}{\rho_1^0 \rho_2^0} \nabla^j p_1 + \frac{1}{\rho_2} \nabla^j p_p - \frac{\rho}{\rho_1 \rho_2} \mathbf{F}_{TMi} + \frac{\mathbf{F}_{1mi}}{\rho_1} - \frac{\mathbf{F}_{2mi}}{\rho_2} \right).$$

Рассмотрим случай сферических частиц, когда $L_S^{ij} = L_S g^{ij}$ и $\mathbf{F}_{TM} = k_1 \nabla T + k_2 \left(\mathbf{H} \nabla T \right) \mathbf{H}$ [3]. При этом из сравнения уравнений (28), (29) следует:

$$L_1 = -\frac{T}{L_S} \left(\frac{\rho_1 \rho_2}{\rho} \right)^2, \qquad L_2 = 0,$$

$$N_1 = \frac{L_1}{T} \frac{\rho}{\rho_1 \rho_2} k_1 - \frac{L_1}{T} \left[c_{V2} - c_{V1} + \frac{5k}{2m} - \frac{\rho_2^0 - \rho_1^0}{\rho_2^0 \rho_1^0} \frac{\tilde{p}}{T} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\rho_2^0} \left(\frac{d\alpha}{dT} - \frac{\alpha}{T} \right) \frac{H^2}{8\pi} - \frac{1}{\rho_1} \frac{d\mu}{dT} \frac{H^2}{8\pi} \right], \quad N_2 = \frac{L_1}{T} \frac{\rho}{\rho_1 \rho_2} k_2,$$

$$\mathbf{F}_{2m} = \alpha \varphi \nabla \frac{H^2}{8\pi}, \;\; \mathbf{F}_{1m} = -\frac{d\mu_1}{dT} \frac{H^2}{8\pi} \nabla T.$$

Рассмотрим случай вытянутых вдоль поля частиц, когда $L_{Sij} = L_{S1} g_{ij} + L_{S2} H_i H_j / H^2$, $L_{Sij}^{-1} = L_{S1}^* g_{ij} + L_{S2}^* H_i H_j / H^2$. Термомагнитная сила, действующая на эллипсоидальные частицы, вычислена в [4] для случая $\mathbf{H} \parallel \nabla T$:

$$\mathbf{F}_{TM} = k_3 \nabla T.$$

При этом мы можем определить следующие коэффициенты и их комбинации:

$$L_1 = -L_{S1}^* T \left(\frac{\rho_1 \rho_2}{\rho} \right)^2, \qquad L_2 = -\frac{L_{S2}^* T}{H^2} \left(\frac{\rho_1 \rho_2}{\rho} \right)^2,$$

$$\frac{N_1 + N_2 H^2}{L_1 + L_2 H^2} T = \frac{\rho}{\rho_1 \rho_2} k_3 - \left[c_{V2} - c_{V1} + \frac{5k}{2m} - \frac{\rho_2^0 - \rho_1^0}{\rho_2^0 \rho_1^0} \frac{\tilde{p}}{T} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\rho_2^0} \left(\frac{d\alpha}{dT} - \frac{\alpha}{T} \right) \frac{H^2}{8\pi} - \frac{1}{\rho_1} \frac{d\mu_1}{dT} \frac{H^2}{8\pi} \right].$$

В этом случае не удается узнать коэффициенты N_1 и N_2 по отдельности.

Выводы.

1. Методами термодинамики необратимых процессов получена диффузионная модель двухфазной намагничивающейся жидкой среды, учиты-

вающая термодиффузию диспергированной фазы, которая связана с броуновским движением и с термомагнитной силой, действующей на диспергированную фазу. Эта модель содержит неизвестные феноменологические коэффициенты.

2. Выписывается и упрощается (в диффузионном приближении) многоскоростная модель такой среды, учитывающая термомагнитную силу и броуновское движение диспергированной фазы. Выписывается уравнение для смеси и уравнение диффузии, в которых, если известны термомагнитная сила и сила Стокса, то неизвестны только магнитные силы, действующие на каждую фазу.

3. Из сравнения уравнений движения для смеси и уравнений для вектора диффузии, полученных двумя способами в случае, когда известны термомагнитная сила и сила Стокса, показано, что можно определить все неизвестные коэффициенты и магнитные силы, действующие на фазы. В настоящее время термомагнитная сила вычислена для произвольного направления магнитного поля и градиента температуры только для сферического тела. Для вытянутого сфероида термомагнитная сила вычислена в случае, когда магнитное поле параллельно градиенту температуры. Поэтому для смеси вытянутых сфероидальных частиц в жидкости можно вычислить только некоторую комбинацию неизвестных констант.

Работа проведена при финансовой поддержке РФФИ (01-01-00010).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гогосов В.В., Налетова В.А., Шапошникова Г.А. Гидродинамика дисперсных систем, взаимодействующих с магнитным полем. Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, N 3,59-70.
2. Гогосов В.В., Налетова В.А., Шапошникова Г.А. Диффузионная и многоскоростная модели двухфазных сред в электрическом поле. ПММ, 1980, 44, N 2, 290-300.
3. Налетова В.А., Тимонин Г.А., Шкель И.А. О силе, действующей на тело в неоднородно нагретой намагничивающей жидкости. Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа, 1989, N 2, 76-83.
4. Naletova V.A., Kvitantsev A.S. Thermomagnetic force acting on an ellipsoidal body immersed into a nonuniformly heated magnetic liquid. Book of Abstracts, 9th International Conference on Magnetic Fluids, Bremen, July 2001, 2001, 142.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука. 1982. 620 с.

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

Материалы международной школы-семинара
(г. Воронеж, 4-8 июня 2002 г.)

Часть 2

Лицензия ИД № 00437 от 10.11.99
Заказ № 684 . Формат 60×84/16
Объем 15 п.л. Тираж 100 экз.

Отпечатано в типографии ВГУ
394000, Воронеж, ул. Пушкинская, 3